Über die W-Flächen mit der Relation $2(R_1 - R_2) = \sin 2(R_1 + R_2)$ zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Friedrich Pfeiffer

aus Augsburg.

Referent:
Prof. Dr. A. v. Braunmühl.

Korreferent:
Prof. Dr. W. v. Dyck.

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juli 1907.

München 1907

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Über die W-Flächen mit der Relation $2(R_1 - R_2) = \sin 2(R_1 + R_2)$ zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Friedrich Pfeiffer

aus Augsburg.

AUGSB. LUDW. BAY. BIBL.

Referent: **Prof. Dr. A. v. Braunmühl.**

Korreferent: **Prof. Dr. W. v. Dyck.**

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juli 1907.

München 1907

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

1. Abschnitt.

Gleichungen und Eigenschaften dieser speziellen Gattung von W-Flächen und ihrer Zentraflächen.

§ 1. Aufstellung der Gleichung der W-Fläche nach der Methode von Weingarten 3

§ 2. Geometrische Erzeugung der Zentrafläche nach der Methode von Darboux 5

§ 3. Zusammenhang der Zentrafläche mit der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s \partial t} = 0$ 9

§ 4. Aufstellung der Gleichung der Originalfläche . . . 12

§ 5. Zusammenhang zwischen den verschiedenen Methoden . 16

§ 6. Über einige Zusammenhänge dieser Flächen mit den Translationsflächen 17

2. Abschnitt.

Aufsuchung einer speziellen W-Fläche dieser Klasse.

§ 7. Aufstellung der Gleichungen der Original- und Zentrafläche 19

§ 8. Diskussion der Fläche 24

3. Abschnitt.

Die Rotationsflächen mit der Relation $2(R_1 - R_2) = \sin 2(R_1 + R_2)$ zwischen den Hauptkrümmungsradien.

§ 9. Integration der Differentialgleichung dieser Flächen . . 44

§ 10. Diskussion des Meridians der Original- und Zentrafläche . 51

§ 11. Anwendung der in den §§ 1 und 2 angeführten Methoden auf die Rotationsflächen unserer Flächenklasse . . . 55

Einleitung.

J. Weingarten hat in einer Abhandlung: „Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Funktion des andern ist“ [1]) gezeigt, daß die Aufsuchung der Flächen, für welche eine Relation zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 in jedem Punkte besteht, hinauskommt auf die Transformation des Linienelementes einer Kugel in die Form:

$$ds = \sqrt{\mathfrak{E}\,du^2 + \varphi(\mathfrak{E})\,dv^2}.$$

Betrachtet man nämlich die sphärische Abbildung einer solchen Fläche, so nimmt das Linienelement der Bildkugel, bezogen auf das den Krümmungslinien der Fläche entsprechende Orthogonalsystem, die obige Form an, und die Kenntnis dieses Kurvensystems auf der Kugel reicht dann aus, die endliche Gleichung der fraglichen Fläche herzustellen. Weingarten hat auf Grund dieses Satzes eine neue Ableitung der bereits bekannten Kanal- und Minimalflächen gegeben und hat zu diesen beiden Flächengattungen noch eine neue hinzugefügt, für die die Relation:

$$2(R_1 - R_2) = \sin 2(R_1 + R_2)$$

besteht, wenn R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien der Fläche sind.

Die Krümmungsmittelpunktsflächen dieser W-Flächen sind auf das imaginäre Rotationsparaboloid abwickelbar; sie wurden

[1]) Crelle, Journal f. d. r. u. a. Math., Bd. 62 (1863), p. 160—173.

weiter untersucht von Darboux,[1]) der auch eine neue Erzeugungsweise derselben gab.

Spezielle Flächen der oben genannten Gattung von W-Flächen sind bisher noch nicht untersucht worden. In der folgenden Arbeit werden nun zunächst die verschiedenen Erzeugungsweisen der Flächen einander gegenübergestellt und auf ihren Zusammenhang untersucht, sodann wird auf ihre Beziehungen zu den Translationsflächen hingewiesen. Im zweiten Abschnitt wird eine spezielle Fläche dieser Klasse von W-Flächen aufgestellt und diskutiert, und im dritten werden die Rotationsflächen dieser Klasse aufgesucht.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit erhielt ich von Herrn Professor Dr. A. v. Braunmühl, dem ich hiefür, sowie für mannigfache wohlwollende Förderung während der Ausführung zu aufrichtigem Danke verpflichtet bin.

---

[1]) Darboux, Leçons sur la Théorie générale des Surfaces, Bd. III (künftig zitiert als Leçons III), p. 316—333 und 357—374; und Darboux, Bulletin des Sciences Mathématiques, Tome XXIX, 1905, 2ième série, p. 109—119 (künftig zitiert als „Bulletin").

1. Abschnitt.

Gleichungen und Eigenschaften dieser speziellen Gattung von W-Flächen und ihrer Zentraflächen.

§ 1. Aufstellung der Gleichung der W-Fläche nach der Methode von Weingarten.

Bei der Methode von Weingarten[1]) handelt es sich darum, das Linienelement der Kugel auf die Form zu bringen:

$$d\sigma^2 = \frac{du^2}{w^2} + \frac{dv^2}{1-w^2},$$

wobei w eine Funktion von u und v ist. Dies erreicht Weingarten auf folgende Weise: Nimmt man auf der Einheitskugel zwei beliebige Kurven C_1 und C_2 an und legt die Lage eines Kugelpunktes fest durch die (auf größten Kreisen gemessenen) geodätischen Abstände p und q von diesen Kurven, so nimmt das Linienelement der Kugel, bezogen auf die Kurven:

$$u = \frac{p+q}{2} = \text{const. und } v = \frac{p-q}{2} = \text{const.}$$

die Form an:

$$d\sigma^2 = \frac{du^2}{\sin^2\frac{\psi}{2}} + \frac{dv^2}{\cos^2\frac{\psi}{2}}.$$

Dabei ist ψ der Winkel der Parameterkurven p und q. Zu jeder solchen Einteilung der Kugel gehört eine spezielle W-Fläche unserer Gattung. Seien die Koordinaten eines

[1]) Vgl. die Seite 1, Anmerkung 1 zitierte Abhandlung.

Punktes der Kurve $C_1 : \xi, \eta, \zeta$ gegeben als Funktionen der Bogenlänge s, die von $C_2 : \lambda, \mu, \nu$ als Funktionen der Bogenlänge t, so ist:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1; \quad \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 = 1$$

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1; \quad \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 = 1.$$

$\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}, \frac{d\zeta}{ds}$ bzw. $\frac{d\lambda}{dt}, \frac{d\mu}{dt}, \frac{d\nu}{dt}$ sind dann die Richtungskosinus der Tangenten an C_1 bzw. C_2. Die Koordinaten X, Y, Z eines Punktes der Kugel drücken sich in den Parametern s und t so aus:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\frac{d\eta}{ds}\frac{d\nu}{dt} - \frac{d\zeta}{ds}\frac{d\mu}{dt}}{\sin\psi} \\ Y &= \frac{\frac{d\zeta}{ds}\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\xi}{ds}\frac{d\nu}{dt}}{\sin\psi} \\ Z &= \frac{\frac{d\xi}{ds}\frac{d\mu}{dt} - \frac{d\eta}{ds}\frac{d\lambda}{dt}}{\sin\psi} \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Die Gleichung der W-Fläche in den Parametern s und t ist dann die folgende:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2\psi}\left[\left(\varepsilon\frac{d\xi}{ds} + \delta\frac{d\lambda}{dt}\right)m\,ds + \left(\varepsilon\frac{d\lambda}{dt} + \delta\frac{d\xi}{ds}\right)n\,dt\right] \\ y &= -\tfrac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2\psi}\left[\left(\varepsilon\frac{d\eta}{ds} + \delta\frac{d\mu}{dt}\right)m\,ds + \left(\varepsilon\frac{d\mu}{dt} + \delta\frac{d\eta}{ds}\right)n\,dt\right] \\ z &= -\tfrac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2\psi}\left[\left(\varepsilon\frac{d\zeta}{ds} + \delta\frac{d\nu}{dt}\right)m\,ds + \left(\varepsilon\frac{d\nu}{dt} + \delta\frac{d\zeta}{ds}\right)n\,dt\right]. \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Dabei sind die Abkürzungen eingeführt:

$$\varepsilon = \psi - \sin\psi\cos\psi; \qquad \delta = \sin\psi - \psi\cos\psi$$

$$m = \frac{\partial X}{\partial s}\frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial Y}{\partial s}\frac{d\eta}{ds} + \frac{\partial Z}{\partial s}\frac{d\zeta}{ds}; \quad n = \frac{\partial X}{\partial t}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{d\mu}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial t}\frac{d\nu}{dt}.$$

Die Hauptkrümmungsradien der Fläche sind:

$$R_1 = \frac{\psi + \sin\psi}{4}; \quad R_2 = \frac{\psi - \sin\psi}{4}. \qquad 3)$$

§ 2. Geometrische Erzeugung der Zentrafläche nach der Methode von Darboux.

Wir wollen nun zeigen, wie man von den Flächengleichungen 2) ausgehend, direkt zu der von Darboux auf anderem Wege gefundenen Gleichungsform gelangen kann. Zu dem Zwecke suchen wir die Gleichung der Zentrafläche auf. Wir bezeichnen die Richtungskosinus:

$$\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}, \frac{d\zeta}{ds} \text{ bzw. } \frac{d\lambda}{dt}, \frac{d\mu}{dt}, \frac{d\nu}{dt}$$

mit f, f_1, f_2, bzw. $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$. Dann ist:

$$\cos\psi = \frac{d\xi}{ds}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\eta}{ds}\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\zeta}{ds}\frac{d\nu}{dt} = f\varphi + f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2, \qquad 4)$$

sowie:

$$f^2 + f_1^2 + f_2^2 = 1 \quad \text{und} \quad \varphi^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1. \qquad 5)$$

Der eine Mantel der Zentrafläche ist allgemein gegeben durch die Koordinaten seiner Punkte:

$$x_1 = x + R_1 X$$
$$y_1 = y + R_1 Y$$
$$z_1 = z + R_1 Z,$$

wenn X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen der Fläche bedeuten. Führt man für x seinen Wert aus Gleichung 2) ein, so kann man $R_1 X$ unter das Integral setzen als:

$$R_1 dX + X dR_1 = \frac{\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\xi}{ds}}{\sin\psi}\frac{1-\cos\psi}{2\sin\psi}(m\,ds + n\,dt)\frac{\psi+\sin\psi}{4}$$
$$+ \frac{\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\xi}{ds}}{\sin\psi}\frac{1+\cos\psi}{2\sin\psi}(-m\,ds + n\,dt)\frac{\psi+\sin\psi}{4} + \frac{1+\cos\psi}{4}\,d\psi\,X.^1)$$

---

[1]) Vgl. die Seite 1, Anmerkung 1 zitierte Abhandlung.

Da sich aber x in der Form schreiben läßt:

$$x = -\int\Big[\frac{\psi + \sin\psi}{4}\,\frac{\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\xi}{ds}}{\sin\psi}\,\frac{1-\cos\psi}{2\sin\psi}\,(m\,ds + n\,dt)$$

$$+\,\frac{\psi - \sin\psi}{4}\,\frac{\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\xi}{ds}}{\sin\psi}\,\frac{1+\cos\psi}{2\sin\psi}\,(-m\,ds + n\,dt)\Big],$$

so sieht man, daß x_1 die Form annimmt:

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\int\Big[\Big(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\xi}{ds}\Big)\frac{1+\cos\psi}{\sin\psi}(-m\,ds + n\,dt) + \cos\psi\,d\psi\,X + X\,d\psi\Big].$$

Durch partielle Integration des vorletzten Termes erhält man:

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\Big[X\sin\psi + \int\Big\{X\,d\psi - \sin\psi\,dX$$

$$+\Big(\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\xi}{ds}\Big)\frac{1+\cos\psi}{\sin\psi}(-m\,ds + n\,dt)\Big\}\Big].$$

Führen wir die obigen Abkürzungen ein, wobei wir noch setzen:

$$\cos\psi = H, \text{ also } \sin\psi = \sqrt{1-H^2};\; d\psi = -\frac{dH}{\sqrt{1-H^2}},$$

so ergibt sich:

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\big(f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2$$

$$-\int\Big\{\frac{1}{1-H}\big((f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2)(f\,d\varphi + \varphi\,df + f_1\,d\varphi_1 + \varphi_1\,df_1 + f_2\,d\varphi_2 + \varphi_2\,df_2)$$

$$+(\varphi - f)\,[f(\varphi_2\,df_1 - \varphi_1\,df_2) + f_1(\varphi\,df_2 - \varphi_2\,df) + f_2(\varphi_1\,df - \varphi\,df_1)$$

$$+\varphi(f_2\,d\varphi_1 - f_1\,d\varphi_2) + \varphi_1(f\,d\varphi_2 - f_2\,d\varphi) + \varphi_2(f_1\,d\varphi - f\,d\varphi_1)\,]\big)$$

$$+(\varphi_2\,df_1 - \varphi_1\,df_2 + f_1\,d\varphi_2 - f_2\,d\varphi_1)\Big\}\Big).$$

Der Ausdruck unter dem Integral läßt sich durch günstige Zusammenfassung der Glieder vereinfachen und es wird:

$$x_1 = \tfrac{1}{4}\big(f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2$$

$$-\int\Big[\frac{1}{1-H}\{[\varphi_2\,d\varphi_1 - \varphi_1\,d\varphi_2](1-H) - [f_2\,df_1 - f_1\,df_2](1-H)$$

$$+(1-H)\,d(\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1)\} + (\varphi_2\,df_1 - \varphi_1\,df_2 + f_1\,d\varphi_2 - f_2\,d\varphi_1)\Big]\big)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{4}\,(f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2 - \int(\varphi_2 d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi_2) + \int(f_2 df_1 - f_1 df_2)),\ \text{analog} \\ y_1 &= \tfrac{1}{4}\,(f_2\varphi - \varphi_2 f - \int(\varphi\, d\varphi_2 - \varphi_2 d\varphi) + \int(f\, df_2 - f_2 df)), \\ z_1 &= \tfrac{1}{4}\,(f\varphi_1 - \varphi f_1 - \int(\varphi_1 d\varphi - \varphi\, d\varphi_1) + \int(f_1 df - f\, df_1)). \end{aligned}\right\} 6)$$

In ganz ähnlicher Weise berechnen sich die Koordinaten eines Punktes des zweiten Mantels zu:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \tfrac{1}{4}\,(\varphi_1 f_2 - f_1\varphi_2 - \int(\varphi_2 d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi_2) + \int(f_2 df_1 - f_1 df_2)), \\ y_2 &= \tfrac{1}{4}\,(\varphi_2 f - f_2\varphi - \int(\varphi\, d\varphi_2 - \varphi_2 d\varphi) + \int(f\, df_2 - f_2 df)), \\ z_2 &= \tfrac{1}{4}\,(\varphi f_1 - f\varphi_1 - \int(\varphi_1 d\varphi - \varphi\, d\varphi_1) + \int(f_1 df - f\, df_1)). \end{aligned}\right\} 7)$$

Dies sind die von Darboux[1]) zuerst gegebenen Formeln. Darboux[2]) zeigt, daß diese Zentraflächen isometrisch sind mit dem imaginären Rotationsparaboloid:

$$x^2 + y^2 = 2\,i\,z.$$

Für die Koordinaten der Punkte der Fläche, welche durch die Mitten der Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden Mäntel gebildet wird, ergeben sich die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \tfrac{1}{4}\left(\int(f_2 df_1 - f_1 df_2) - \int(\varphi_2 d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi_2)\right) \\ y_0 &= \frac{y_1 + y_2}{2} = \tfrac{1}{4}\left(\int(f\, df_2 - f_2 df) - \int(\varphi\, d\varphi_2 - \varphi_2\, d\varphi)\right) \\ z_0 &= \frac{z_1 + z_2}{2} = \tfrac{1}{4}\left(\int(f_1 df - f\, df_1) - \int(\varphi_1 d\varphi - \varphi\, d\varphi_1)\right). \end{aligned}\right\} 8)$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt, daß diese Fläche eine Translationsfläche ist, die gebildet wird durch die Mitten der Verbindungslinien aller Punkte der beiden Kurven:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \tfrac{1}{2}\int(f_2 df_1 - f_1 df_2) & X_2 &= -\tfrac{1}{2}\int(\varphi_2 d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi_2) \\ Y_1 &= \tfrac{1}{2}\int(f\, df_2 - f_2 df) & Y_2 &= -\tfrac{1}{2}\int(\varphi\, d\varphi_2 - \varphi_2 d\varphi) \\ Z_1 &= \tfrac{1}{2}\int(f_1 df - f\, df_1) & Z_2 &= -\tfrac{1}{2}\int(\varphi_1 d\varphi - \varphi\, d\varphi_1). \end{aligned}\right\} 9)$$

---

[1]) Leçons III, p. 368.

[2]) Leçons III, p. 370 und „Bulletin", p. 116.

f, f_1, f_2 sind nach Gleichung 5) Funktionen von s, φ, φ_1, φ_2 Funktionen von t, für welche die Summe der Quadrate $= 1$ ist. Sie sind nach Darboux[1]) die Richtungskosinus der Binormalen der durch die Gleichungen 9) dargestellten Kurven entgegengesetzt gleicher konstanter Torsion $+2$ und -2.

Die Richtung der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte der Zentraflächen 6) und 7) ist gegeben durch die Richtungskosinus:

$$\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}; \quad \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}};$$

$$\frac{z_1 - z_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}},$$

oder:

$$\cos\alpha = \frac{f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2}{\sin\psi}; \quad \cos\beta = \frac{f_2\varphi - \varphi_2 f}{\sin\psi}; \quad \cos\gamma = \frac{f\varphi_1 - \varphi f_1}{\sin\psi}.$$

Weil f, f_1, f_2 bzw. $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ zu diesen Richtungskosinus in der Beziehung stehen:

$$f\cos\alpha + f_1\cos\beta + f_2\cos\gamma = 0$$

bzw.
$$\varphi\cos\alpha + \varphi_1\cos\beta + \varphi_2\cos\gamma = 0,$$

so sind diese Verbindungslinien parallel zu den Schnittlinien der Schmiegungsebenen in den Punkten der Kurven 9), die zu denselben Werten der Parameter s und t gehören. Andererseits sind diese Richtungen auch nach den Gleichungen 1) parallel den Radien der Kugel nach den diesen Parameterwerten entsprechenden Kugelpunkten. D. h. die Normalen der W-Fläche sind parallel den Schnittlinien der Schmiegungsebenen der Raumkurven konstanter Torsion in Punkten mit den zugehörigen Werten der Parameter.

Damit haben wir die von Darboux angegebene Erzeugungsweise der Zentraflächen unserer W-Flächen auf anderem Wege wieder erhalten:[2])

[1]) Leçons III, p. 371—372.
[2]) Vgl. Leçons III, p. 373.

„Hat man irgend zwei Raumkurven entgegengesetzt gleicher konstanter Torsion $+2$ und -2, so bilden die Mitten P der Verbindungslinien aller Punkte P_1 und P_2 der beiden Kurven eine Translationsfläche. Zieht man durch alle Punkte P derselben Gerade, die der Schnittlinie der Schmiegungsebenen in den zugehörigen Punkten P_1 und P_2 parallel sind, so bilden diese Geraden das Normalensystem einer W-Fläche mit der Relation $2(R_1 - R_2) = \sin 2(R_1 + R_2)$ zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2."

§ 3. Zusammenhang der Zentrafläche mit der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s \partial t} = 0$.

Zu einer neuen Methode der Aufstellung der durch die Gleichungen 6) und 7) gegebenen Flächen, kommen wir, wenn wir beachten, daß die Parameterkurven s, t, auf die die Flächen in der obigen Darstellung bezogen sind, ihre Haupttangentenkurven sind, oder mit anderen Worten, daß die von Weingarten eingeführten Parameterkurven s und t der Kugel den Haupttangentenkurven der beiden Mäntel der Zentrafläche der zugehörigen W-Fläche entsprechen. Zum Beweise verwenden wir den bereits von Darboux[1]) aufgestellten Satz, daß die Normale in einem Punkte der Zentrafläche parallel ist zur Winkelhalbierenden der Kurven $s = \text{const.}$ und $t = \text{const.}$ in dem entsprechenden Punkte des sphärischen Bildes der W-Fläche. Beschränken wir uns beim Beweise auf den ersten Mantel der Zentrafläche, so sind also die Richtungskosinus seiner Normalen im Punkte s, t:

$$\mathfrak{x} = \frac{\varphi + f}{\sqrt{2 + 2H}}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\varphi_1 + f_1}{\sqrt{2 + 2H}}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\varphi_2 + f_2}{\sqrt{2 + 2H}}.$$

Betrachtet man nun die sphärische Abbildung der Zentrafläche selbst, so sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Koordinaten eines Punktes der Bildkugel und die Richtungskosinus der Tangenten an die durch

[1]) Bulletin, p. 110.

diesen Punkt der Kugel gehenden Parameterkurven $t = \text{const.}$ bzw. $s = \text{const.}$ sind proportional zu $\mathfrak{x}_s, \mathfrak{y}_s, \mathfrak{z}_s$ bzw. $\mathfrak{x}_t, \mathfrak{y}_t, \mathfrak{z}_t$.

$$\mathfrak{x}_s = \frac{df}{ds}\frac{1}{\sqrt{2+2H}} + (\varphi + f)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\sqrt{2+2H}}\right), \text{ analog } \mathfrak{y}_s \text{ und } \mathfrak{z}_s.$$

$$\mathfrak{x}_t = \frac{d\varphi}{dt}\frac{1}{\sqrt{2+2H}} + (\varphi + f)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2+2H}}\right), \text{ analog } \mathfrak{y}_t \text{ und } \mathfrak{z}_t.$$

Die Koordinatenkurven im entsprechenden Punkte der Zentrafläche haben ihrerseits Richtungskosinus, die proportional sind den Größen x_{1s}, y_{1s}, z_{1s} bzw. x_{1t}, y_{1t}, z_{1t}.

$$x_{1s} = -(\varphi_1 + f_1)\frac{df_2}{ds} + (\varphi_2 + f_2)\frac{df_1}{ds}, \text{ analog } y_{1s} \text{ und } z_{1s}$$

$$x_{1t} = \quad (\varphi_1 + f_1)\frac{d\varphi_2}{dt} - (\varphi_2 + f_2)\frac{d\varphi_1}{dt}, \text{ analog } y_{1t} \text{ und } z_{1t}.$$

Bildet man die Ausdrücke:

$$\mathfrak{x}_s x_{1s} + \mathfrak{y}_s y_{1s} + \mathfrak{z}_s z_{1s} \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{x}_t x_{1t} + \mathfrak{y}_t y_{1t} + \mathfrak{z}_t z_{1t},$$

so werden diese $= 0$. D. h. die Richtung der Kurve $s = \text{const.}$ bzw. $t = \text{const.}$ in einem Punkte der Zentrafläche und die Richtung ihres sphärischen Bildes im entsprechenden Punkt der Einheitskugel stehen aufeinander senkrecht. Daher sind die Kurven $s = \text{const.}$ und $t = \text{const.}$[1]) die Haupttangentenkurven auf dem ersten Mantel. Dasselbe ließe sich für den zweiten Mantel in analoger Weise zeigen. Damit ergibt sich, daß sich die Haupttangentenkurven auf den beiden Mänteln der Zentrafläche unserer W-Flächen entsprechen.

Die oben gefundenen Gleichungen für die beiden Mäntel der Zentrafläche lassen sich auch so schreiben:

---

[1]) Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie (künftig zitiert als „Bianchi"), p. 121.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{1}{4}\left(\int[(f_1+\varphi_1)(df_2-d\varphi_2)-(f_2+\varphi_2)(df_1-d\varphi_1)]\right)\\ y_1 &= -\tfrac{1}{4}\left(\int[(f_2+\varphi_2)(df-d\varphi)-(f+\varphi)\ (df_2-d\varphi_2)]\right)\\ z_1 &= -\tfrac{1}{4}\left(\int[(f+\varphi)\ (df_1-d\varphi_1)-(f_1+\varphi_1)(df-d\varphi)]\right)\end{aligned}\right\}$$

und:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= -\tfrac{1}{4}\left(\int[(f_1-\varphi_1)(df_2+d\varphi_2)-(f_2-\varphi_2)(df_1+d\varphi_1)]\right)\\ y_2 &= -\tfrac{1}{4}\left(\int[(f_2-\varphi_2)(df+d\varphi)-(f-\varphi)\ (df_2+d\varphi_2)]\right)\\ z_2 &= -\tfrac{1}{4}\left(\int[(f-\varphi)\ (df_1+d\varphi_1)-(f_1-\varphi_1)(df+d\varphi)]\right)\end{aligned}\right\} 10)$$

Daher ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial s} &= +\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} f_2+\varphi_2 & f_1+\varphi_1 \\ f_2' & f_1' \end{vmatrix};\quad \frac{\partial x_1}{\partial t} = -\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} f_2+\varphi_2 & f_1+\varphi_1 \\ \varphi_2' & \varphi_1' \end{vmatrix}\\ \frac{\partial x_2}{\partial s} &= +\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} f_2-\varphi_2 & f_1-\varphi_1 \\ f_2' & f_1' \end{vmatrix};\quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = -\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} f_2-\varphi_2 & f_1-\varphi_1 \\ -\varphi_2' & -\varphi_1' \end{vmatrix}.^{1})\end{aligned}\right\} 11)$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für die Ableitungen von y und z. Die sechs Funktionen:

$$\Theta = \tfrac{1}{2}(f+\varphi);\quad \Theta_1 = \tfrac{1}{2}(f_1+\varphi_1);\quad \Theta_2 = \tfrac{1}{2}(f_2+\varphi_2) \qquad 12)$$

bzw.:

$$\Theta' = \tfrac{1}{2}(f-\varphi);\quad \Theta_1' = \tfrac{1}{2}(f_1-\varphi_1);\quad \Theta_2' = \tfrac{1}{2}(f_2-\varphi_2) \qquad 13)$$

sind partikuläre Integrale der Laplaceschen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s\,\partial t} = 0.$$

Unsere Gleichungen 11) sind aber[2]) die Lelieuvreschen Formeln, angewandt auf die Funktionen Θ, Θ_1, Θ_2 und Θ', Θ_1', Θ_2' von s und t, und liefern daher durch Quadratur zwei Flächen, auf denen die Kurven s und t die Haupttangentenkurven sind.[3]) Das sind die durch die Gleichungen 10) definierten Flächen.

---

[1]) Vgl. Bianchi, p. 323.

[2]) Ebenda, p. 132, Gleichung 18).

[3]) Ebenda, p. 133.

Diese Gleichungen 10) stellen aber die Zentraflächen unserer W-Flächen vor, sobald noch die Bedingung erfüllt ist, daß:

$$f^2 + f_1^2 + f_2^2 = 1 \quad \text{und} \quad \varphi^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1.$$

Die Lelieuvreschen Formeln, angewandt auf solche partikuläre Lösungen Θ, Θ_1, Θ_2 und Θ', Θ_1', Θ_2' der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s \partial t} = 0$, liefern also durch eine Quadratur die Zentraflächen unserer W-Flächen. Deutet man noch Θ, Θ_1, Θ_2 sowohl als Θ', Θ_1', Θ_2' als Koordinaten eines Punktes einer Translationsfläche, deren erzeugende Kurven sphärische Kurven sind, so kann man das Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

Hat man irgend eine Translationsfläche, deren erzeugende Kurven sphärische Kurven ein und derselben Kugel sind, und wendet man auf die Koordinaten dieser Translationsfläche die Lelieuvreschen Formeln an, so erhält man eine Fläche, welche auf das imaginäre Rotationsparaboloid abwickelbar ist. Dabei muß die Translationsfläche auf das konjugierte System der erzeugenden sphärischen Kurven bezogen sein.

Erhält man die Translationsfläche Θ, Θ_1, Θ_2 als Ort der Sehnenmitten zweier Kurven auf der Einheitskugel, so ist die mit Hilfe der Lelieuvreschen Formeln erhaltene Fläche der eine Mantel der Zentrafläche einer W-Fläche unserer Klasse. Um den zweiten Mantel zu erhalten, ist für die eine sphärische Kurve die symmetrische Kurve in Bezug auf den Anfangspunkt zu wählen.

§ 4. Aufstellung der Gleichung der Originalfläche.

Darboux beschränkt sich in den schon öfters genannten Abhandlungen auf die Aufstellung der Gleichung und die Untersuchung der Zentrafläche. Um die Punktgleichungen der W-Fläche selbst zu bestimmen, schlagen wir folgenden Weg ein. Das Strahlensystem, das durch die Gleichungen:

$$x = \frac{X_1 + X_2}{2} + \lambda \frac{f_1 \varphi_2 - \varphi_1 f_2}{\sin \psi}$$

$$y = \frac{Y_1 + Y_2}{2} + \lambda \frac{f_2 \varphi - \varphi_2 f}{\sin \psi}$$

$$z = \frac{Z_1 + Z_2}{2} + \lambda \frac{f \varphi_1 - \varphi f_1}{\sin \psi}$$

bestimmt ist, ist das Normalensystem unserer Fläche. Dabei ist λ ein willkürlicher Parameter, abhängig von s und t. Wir wollen nun λ so bestimmen, daß die Punkte x, y, z des Normalensystems gerade Punkte unserer W-Fläche sind. Dann ist λ gegeben durch: [1])

$$\lambda = -\int \Big[\frac{f_1 \varphi_2 - \varphi_1 f_2}{\sin \psi} d\Big(\frac{X_1 + X_2}{2}\Big) + \frac{f_2 \varphi - \varphi_2 f}{\sin \psi} d\Big(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\Big) + \frac{f \varphi_1 - \varphi f_1}{\sin \psi} d\Big(\frac{Z_1 + Z_2}{2}\Big) \Big] + C.$$

Dabei bedeutet C eine willkürliche Konstante; ihre Wahl gibt uns alle Parallelflächen zu einer der W-Flächen. Setzen wir die Werte der Differentiale aus 9) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda = &-\int \frac{1}{4 \sin \psi} [(f_1 \varphi_2 - \varphi_1 f_2)(f_2 df_1 - f_1 df_2 - \varphi_2 d\varphi_1 + \varphi_1 d\varphi_2) \\
&+ (f_2 \varphi - \varphi_2 f)(f df_2 - f_2 df - \varphi d\varphi_2 + \varphi_2 d\varphi) \\
&+ (f \varphi_1 - \varphi f_1)(f_1 df - f df_1 - \varphi_1 d\varphi + \varphi d\varphi_1)] + C \\
= &-\int \frac{1}{4 \sin \psi} [d\varphi(f_2 \varphi_2 \varphi - \varphi_2^2 f - f \varphi_1^2 + \varphi \varphi_1 f_1) \\
&+ df(-f_2^2 \varphi + \varphi_2 f f_2 + f f_1 \varphi_1 - \varphi f_1^2) + d\varphi_1(f \varphi \varphi_1 - \varphi^2 f_1 - f_1 \varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_2 f_2) \\
&+ df_1(-f^2 \varphi_1 + \varphi f_1 f + f_1 f_2 \varphi_2 - \varphi_1 f_2^2) + d\varphi_2(f_1 \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1^2 f_2 - f_2 \varphi^2 + \varphi_2 \varphi f) \\
&+ df_2(-f_1^2 \varphi_2 + \varphi_1 f_2 f_1 + f_2 f \varphi - \varphi_2 f^2)] + C \\
= &-\int \frac{1}{4 \sin \psi} [-(f d\varphi + \varphi df + f_1 d\varphi_1 + \varphi_1 df_1 + f_2 d\varphi_2 + \varphi_2 df_2) \\
&+ \cos \psi (\varphi d\varphi + \varphi_1 d\varphi_1 + \varphi_2 d\varphi_2 + f df + f_1 df_1 + f_2 df_2)] + C \\
= &-\int \frac{-d(\cos \psi)}{4 \sin \psi} + C = -\frac{\psi}{4} + C.
\end{aligned}$$

[1]) Vgl. z. B. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen, p. 473.

Die Gleichung der W-Fläche ist also gegeben durch:

$$x = \tfrac{1}{4}\left[\int(f_2 df_1 - f_1 df_2) - \int(q_2 dq_1 - q_1 dq_2) - (\psi + C')\frac{f_1 q_2 - q_1 f_2}{\sin\psi}\right]$$

$$y = \tfrac{1}{4}\left[\int(f df_2 - f_2 df) - \int(q\, dq_2 - q_2 dq) - (\psi + C')\frac{f_2 q - q_2 f}{\sin\psi}\right]$$

$$z = \tfrac{1}{4}\left[\int(f_1 df - f df_1) - \int(q_1 dq - q\, dq_1) - (\psi + C')\frac{f q_1 - q f_1}{\sin\psi}\right].$$

Der Beweis dafür, daß für diese Flächen tatsächlich die fragliche Relation zwischen R_1 und R_2 besteht, liefert uns zugleich eine Determination bezüglich der Konstanten C'. Es ist:

$$R_1^2 = \Sigma(x_1 - x)^2 = \tfrac{1}{16}(\sin\psi + \psi + C')^2$$

$$R_2^2 = \Sigma(x_2 - x)^2 = \tfrac{1}{16}(-\sin\psi + \psi + C')^2$$

$$2(R_1 - R_2) = \sin\psi; \qquad 2(R_1 + R_2) = \psi + C'.$$

Unsere Relation ist also nur dann erfüllt, wenn C' ein ganzes Vielfaches von 2π ist. D. h.: Nicht jede Parallelfläche zu einer W-Fläche unserer Gattung ist wieder eine W-Fläche derselben Gattung, sondern nur Parallelflächen im Abstande $\frac{2k\pi}{4}$ (k eine ganze Zahl) in Richtung der Normalen gemessen. Die Werte $C' = 2k\pi$ werden aber bereits dadurch berücksichtigt, daß wir den Winkel ψ alle möglichen Quadranten durchlaufen lassen. Dann wird also unsere Fläche definiert durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4}\left[\int(f_2 df_1 - f_1 df_2) - \int(q_2 dq_1 - q_1 dq_2) - \psi\frac{f_1 q_2 - q_1 f_2}{\sin\psi}\right] \\ y &= \tfrac{1}{4}\left[\int(f df_2 - f_2 df) - \int(q\, dq_2 - q_2 dq) - \psi\frac{f_2 q - q_2 f}{\sin\psi}\right] \\ z &= \tfrac{1}{4}\left[\int(f_1 df - f df_1) - \int(q_1 dq - q\, dq_1) - \psi\frac{f q_1 - q f_1}{\sin\psi}\right] \end{aligned}\right\} 14)$$

Wählt man also irgend zwei Paare von je drei Funktionen, für welche die Summe der Quadrate = 1 ist, so stellen die Gleichungen 14) eine W-Fläche unserer Gattung vor.

Dabei ist ψ definiert durch:

$$\cos\psi = f\varphi + f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2$$

und bedeutet den Winkel der Parameterlinien s und t des sphärischen Bildes.

Die geometrische Erzeugung erkennt man leicht, wenn man Gleichung 14) in der Form schreibt:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{\psi}{4}\cos\alpha \\ y &= y_0 - \frac{\psi}{4}\cos\beta \\ z &= z_0 - \frac{\psi}{4}\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad 15)$$

Also: Man trägt auf den Geraden des Normalensystems von der durch 8) definierten Rückungsfläche aus Strecken ab, deren Länge $= \frac{1}{4}$ des im Bogenmaß gemessenen Winkels der Parameterkurven s und t im entsprechenden Punkte der Kugel ist.

Aus dieser Darstellungsweise folgt sofort, daß die W-Flächen unserer Gattung alle transzendent sind; denn der Winkel ψ der Parameterkurven der Kugel ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt. Man erhält also, wenn man von einem Punkte der W-Fläche ausgehend auf den Normalen konstante Stücke $\frac{2k\pi}{4}$ abträgt, neue Punkte dieser Fläche. Andererseits sind nur die im Abstande $\frac{2k\pi}{4}$ zu einer W-Fläche gezeichneten Parallelflächen wieder W-Flächen unserer Klasse; daher begreift eine W-Fläche unserer Klasse alle zu ihr parallelen W-Flächen derselben Art in sich. Dabei kann es sein, daß die den verschiedenen Werten von k entsprechenden Flächenstücke stetig ineinander übergehen, oder daß einzelne Perioden in sich geschlossene Flächenstücke sind. Bei der später im zweiten Abschnitt zu behandelnden Fläche haben wir den ersten, beim Beispiel der Rotationsflächen den zweiten Fall.

§ 5. Zusammenhang zwischen den verschiedenen Methoden.

Durch Einführung der Funktionen f, f_1, f_2 und φ, φ_1, φ_2 haben die Formeln für unsere W-Flächen eine große Einfachheit erlangt. Die Aufgabe der Bestimmung spezieller Flächen dieser Gattung kommt also darauf hinaus, zwei Paare von je drei Funktionen einer Veränderlichen zu wählen, so daß für jedes Paar die Summe der Quadrate $= 1$ ist. In der Verschiedenheit der geometrischen Deutung der zwei Paare von Funktionen liegt die verschiedene Erzeugungsweise unserer W-Flächen begründet. Bei den von Weingarten gewählten sphärischen Kurven C_1 und C_2 stellen diese Funktionen die Richtungskosinus der Tangenten von C_1 und C_2 dar; bei den Darboux als Ausgangskurven dienenden Kurven konstanter Torsion sind die obigen Funktionen die Richtungskosinus der Binormalen; bei unserer dritten Methode endlich sind die Funktionen f, f_1, f_2 und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ direkt die Koordinaten der Punkte der sphärischen Kurven, deren Sehnenmitten die als Ausgangsfläche verwendete Translationsfläche liefern. Es ergibt sich daher folgender Zusammenhang zwischen den Ausgangskurven:

In entsprechenden Punkten (d. h. für gleiche Werte der Parameter s und t) sind die Tangenten der Kurven C_1 und C_2 auf der Kugel parallel den Binormalen der Kurven konstanter Torsion.

Oder mit anderen Worten:

Die sphärische Indikatrix der Tangenten der sphärischen Kurven C_1 und C_2 ist identisch mit der sphärischen Indikatrix der Binormalen der Kurven konstanter Torsion. Diese gemeinsame sphärische Indikatrix wird gebildet durch die bei der dritten Erzeugungsweise verwendeten Kurven der Einheitskugel.

Man kann nach den Gleichungen 9) die Kurven konstanter Torsion sofort angeben, wenn die Ausgangskurven auf der Kugel gegeben sind. Dagegen ist es nicht so einfach, zu den ersteren die entsprechenden sphärischen Kurven zu be-

stimmen, da hierbei noch die Aufgabe zu lösen ist: diejenigen Kurven auf der Kugel zu bestimmen, die eine vorgeschriebene sphärische Indikatrix der Tangenten haben. Wir werden bei dem Beispiel der Rotationsflächen die Bestimmung der sphärischen Kurven ausführen.

§ 6. Über einige Zusammenhänge dieser Flächen mit den Translationsflächen.

In diesem Paragraphen sollen die Beziehungen, welche die Original- und Zentraflächen unserer Flächenklasse zu den Translationsflächen haben, kurz zusammengefaßt werden. Bei der Darbouxschen Konstruktion unserer W-Normalensysteme ist die Ausgangsfläche eine Translationsfläche, deren erzeugende Kurven von konstanter Torsion sind; während bei der dritten Methode der Aufstellung unserer W-Flächen die Lelieuvreschen Formeln auf eine Rückungsfläche zweier sphärischen Kurven angewendet werden. Diese durch die Gleichungen 12) und 13) dargestellten Rückungsflächen, wir wollen sie kurz als die Flächen Θ und Θ' bezeichnen, stehen aber, wie aus der Theorie der W-Strahlensysteme[1]) sich unmittelbar ergibt, mit den beiden Zentraflächen Σ_1 und Σ_2 in dem Zusammenhang, daß sich Σ_1 und Θ' ebenso wie Σ_2 und Θ durch Orthogonalität der Elemente entsprechen. Dies erkennt man übrigens direkt daraus, daß jeder der beiden Ausdrücke:

$$dx_1\, d\Theta' + dy_1\, d\Theta_1' + dz_1\, d\Theta_2' \quad \text{und}$$
$$dx_2\, d\Theta + dy_2\, d\Theta_1 + dz_2\, d\Theta_2$$

gleich Null ist. Die sich hieraus ergebende Folgerung über die unendlich kleinen Verbiegungen der Flächen Σ_1 und Σ_2 ist bekannt.

Dagegen möge noch auf einen Zusammenhang zwischen unseren W-Flächen selbst und den Translationsflächen hingewiesen werden. Wir haben für die Koordinaten eines Punktes der Bildkugel nach 1) die Werte:

[1]) Vgl. z. B. Bianchi, p. 311 ff.

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2}{\sin\psi} \\ Y &= \frac{f_2\varphi - \varphi_2 f}{\sin\psi} \\ Z &= \frac{f\varphi_1 - \varphi f_1}{\sin\psi}. \end{aligned}\right\} \qquad 16)$$

Betrachtet man nun f, f_1, f_2 als Ableitungen dreier Funktionen nach s, φ, φ_1, φ_2 als diejenigen derselben Funktionen nach t und deutet diese Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \int (f\,ds + \varphi\,dt) \\ y &= \int (f_1\,ds + \varphi_1\,dt) \\ z &= \int (f_2\,ds + \varphi_2\,dt) \end{aligned}\right\} \qquad 17)$$

als Koordinaten einer Fläche, so sind X, Y, Z gerade die Richtungskosinus der Normalen dieser Fläche. Die durch die Gleichungen 17) definierte Fläche ist aber eine Translationsfläche; die Parameter s und t sind die Bogenlängen der erzeugenden konjugierten Kurven, da $f^2 + f_1^2 + f_2^2 = 1$ und $\varphi^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$. Wir haben daher folgenden Satz:

Jeder W-Fläche unserer Gattung entspricht eine Translationsfläche durch Parallelismus der Normalen in der Weise, daß die erzeugenden konjugierten Kurven der Translationsfläche den Haupttangentenkurven auf den beiden Mänteln der Zentrafläche der W-Fläche entsprechen.

Andererseits kann man jede Translationsfläche auf die obige Form 17) bringen, indem man die Bogenlänge der konjugierten Kurven als Parameter einführt. Die Richtungskosinus der Normalen sind dann gegeben durch:

$$X = \frac{f_1\varphi_2 - \varphi_1 f_2}{\sin\psi}, \quad Y = \frac{f_2\varphi - \varphi_2 f}{\sin\psi}, \quad Z = \frac{f\varphi_1 - \varphi f_1}{\sin\psi}.$$

Für $s = \text{const.}$ sind auch f, f_1, f_2 konstant und die Gleichung:

$$fX + f_1 Y + f_2 Z = 0$$

sagt dann aus, daß die Richtung der Normalen der Rückungsfläche längs $s = \text{const.}$ parallel ist zur Ebene des größten Kreises $s = \text{const.}$ auf der Einheitskugel. Ebenso folgt aus:

$$\varphi X + \varphi_1 Y + \varphi_2 Z = 0,$$

daß die Normalen längs $t = \text{const.}$ parallel zur Ebene des größten Kreises $t = \text{const.}$ sind. Daher erhalten wir folgenden Satz über Translationsflächen überhaupt: Bei jeder Translationsfläche sind die Normalen längs jeder der erzeugenden konjugierten Kurven parallel zu einer Ebene.

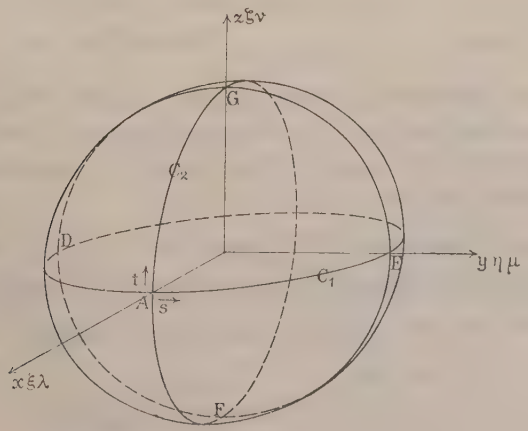
2. Abschnitt.

Aufsuchung einer speziellen *W*-Fläche dieser Klasse.

§ 7. Aufstellung der Gleichungen der Original- und Zentrafläche.

Dieser Abschnitt soll der Aufstellung und Untersuchung einer speziellen *W*-Fläche unserer Gattung gewidmet sein.

Wählen wir als Kurve C_1 den Äquator einer in der gezeichneten Weise auf ein Koordinatensystem x, y, z bezogenen



Kugel vom Radius „1“ und als C_2 den durch den Schnittpunkt A des Äquators mit der x-Achse gehenden Meridian und bezeichnen die in Richtung des Pfeiles von A aus gezählte Bogenlänge des Äquators mit s, die von demselben Punkte A aus in Richtung des andern Pfeiles gezählte Bogenlänge des Meridians mit t, so sind die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes des Äquators bzw. λ, μ, ν eines Punktes des Meridians gegeben durch:

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = \cos s & \lambda = \cos t \\ \eta = \sin s & \mu = 0 \\ \zeta = 0 & \nu = \sin t. \end{array}\right\} \qquad 18)$$

Die Lage eines Punktes der Kugel wird dann dadurch fixiert, daß wir von A aus auf C_1 ein Bogenstück s abtragen und im Endpunkt desselben einen zu C_1 senkrechten größten Kreis legen, und ebenso von A aus eine Bogenlänge t auf C_2 abtragen und durch den Endpunkt einen zu C_2 senkrechten größten Kreis legen. Der Schnittpunkt dieser beiden Kreise ist dann der durch s und t bestimmte Punkt der Kugel, der eindeutig bestimmt ist, sobald wir noch beifügen, daß wir von den beiden größten Kreisen, die sich im allgemeinen in zwei Punkten treffen, nur immer den zwischen FG bzw. DE sich erstreckenden Halbkreis in Betracht ziehen, auf dem der Endpunkt von s bzw. von t liegt. Diese eindeutige Zuweisung gilt nur nicht für die Werte $s = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{2}$, denen jeder Punkt des Kreises $DFEG$ entsprechen kann. Die Kurven $s = \text{const.}$ sind nach dem Gesagten die Meridiane durch F und G, während die Kurven $t = \text{const.}$ die senkrecht C_2 stehenden größten Kreise durch D und E sind.

Unsere Funktionen f, f_1, f_2 und $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, die Richtungskosinus der Tangenten der Kurven C_1 und C_2, werden hiefür:

$$\begin{array}{ll} f = -\sin s & \varphi = -\sin t \\ f_1 = \cos s & \varphi_1 = 0 \\ f_2 = 0 & \varphi_2 = \cos t, \end{array}$$

ferner ist: $\cos\psi = \sin s \sin t$

$$\sin\psi = \sqrt{1 - \sin^2 s \sin^2 t}$$

$$\psi = \arcsin\sqrt{1 - \sin^2 s \sin^2 t}.$$

Die Koordinaten eines Punktes der Einheitskugel sind:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\cos s \cos t}{\sin\psi} \\ Y &= \frac{\sin s \cos t}{\sin\psi} \\ Z &= \frac{\cos s \sin t}{\sin\psi}. \end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

Die Gleichung der W-Fläche wird dann nach 14):

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{4}\frac{\arcsin\sqrt{1 - \sin^2 s \sin^2 t}}{\sqrt{1 - \sin^2 s \sin^2 t}} \cos s \cos t \\ y &= -\tfrac{1}{4}\frac{\arcsin\sqrt{1 - \sin^2 s \sin^2 t}}{\sqrt{1 - \sin^2 s \sin^2 t}} \sin s \cos t - \frac{t}{4} \\ z &= -\tfrac{1}{4}\frac{\arcsin\sqrt{1 - \sin^2 s \sin^2 t}}{\sqrt{1 - \sin^2 s \sin^2 t}} \cos s \sin t - \frac{s}{4}. \end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

Für die beiden Mäntel der Zentrafläche ergeben sich nach 6) und 7) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{4}\cos s \cos t & x_2 &= -\tfrac{1}{4}\cos s \cos t \\ y_1 &= \tfrac{1}{4}\sin s \cos t - \frac{t}{4} & y_2 &= -\tfrac{1}{4}\sin s \cos t - \frac{t}{4} \\ z_1 &= \tfrac{1}{4}\cos s \sin t - \frac{s}{4} & z_2 &= -\tfrac{1}{4}\cos s \sin t - \frac{s}{4}. \end{aligned}\right\} \qquad 21)$$

Die Fläche der Mittelpunkte zwischen zwei zusammengehörigen Punkten dieser Zentraflächenmäntel hat die Punktkoordinaten:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{t}{4}, \quad z_0 = -\frac{s}{4},$$

ist also die yz-Ebene. In unserem Falle ist also die Translationsfläche 8) die yz-Ebene. Die Raumkurven konstanter Torsion sind nach 9) gegeben durch die Gleichungen:

$$X_1 = 0 \qquad X_2 = 0$$
$$Y_1 = 0 \qquad Y_2 = -\frac{t}{2}$$
$$Z_1 = -\frac{s}{2} \qquad Z_2 = 0,$$

d. h. sie sind die z-Achse und die y-Achse.

Die konjugierten Kurven $s = \text{const.}$ bzw. $t = \text{const.}$ sind die Geraden parallel zur y-Achse bzw. parallel zur z-Achse in der yz-Ebene. Die yz-Ebene ist also in ein rechtwinkliges Netz geteilt, dessen Maschen durch die Geraden $s = \text{const.}$ und $t = \text{const.}$ gebildet werden, und man hat durch jeden Punkt s, t desselben eine Parallele zum Kugelradius nach dem Punkte s, t der Einheitskugel zu ziehen. Diese Geraden bilden dann das Normalensystem unserer W-Fläche. Längs jeder Geraden $s = \text{const.}$ bzw. $t = \text{const.}$ sind diese Normalen parallel zur Ebene des zugehörigen größten Kreises der Kugel. Die Strecken, die man von der yz-Ebene aus auf den Normalen abzutragen hat, sind gegeben durch $\frac{1}{4}$ des im Bogenmaß gemessenen Winkels der Parameterlinien s und t im entsprechenden Punkt der Kugel.

Bevor wir an die Diskussion der Fläche selbst gehen, wollen wir noch ihre Gleichung, bezogen auf die Krümmungslinien, aufstellen. Aus der Betrachtung der Kurvensysteme s, t und p, q (vgl. Seite 3) auf der Einheitskugel ergeben sich unter Berücksichtigung der allgemeinen Formeln der auf Seite 1, Anm. 1 zitierten Abhandlung von Weingarten folgende Transformationsformeln:

$$\sin p = \frac{\cos s \sin t}{\sin \psi} \qquad \cos p = \frac{\cos t}{\sin \psi}$$

$$\sin q = \frac{\sin s \cos t}{\sin \psi} \qquad \cos q = \frac{\cos s}{\sin \psi}$$

$$\sin s = \frac{\sin q}{\cos p} \qquad \cos s = \frac{\sqrt{\cos^2 p - \sin^2 q}}{\cos p}$$

$$\sin t = \frac{\sin p}{\cos q} \qquad \cos t = \frac{\sqrt{\cos^2 p - \sin^2 q}}{\cos q}$$

$$\cos \psi = \frac{\sin p \sin q}{\cos p \cos q} \qquad \sin \psi = \frac{\sqrt{\cos^2 p - \sin^2 q}}{\cos p \cos q}.$$

Durch die Substitution:

$$\left.\begin{aligned} p &= u + v \\ q &= u - v \end{aligned}\right\}$$

erhält man auf der Einheitskugel das den Krümmungslinien der Fläche entsprechende Orthogonalsystem und hat nun die Transformationsformeln:

$$\sin s = \frac{\sin (u - v)}{\cos (u + v)} \qquad \cos s = \frac{\sqrt{\cos 2u \cos 2v}}{\cos (u + v)}$$

$$\sin t = \frac{\sin (u + v)}{\cos (u - v)} \qquad \cos t = \frac{\sqrt{\cos 2u \cos 2v}}{\cos (u - v)}$$

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{\cos 2u \cos 2v}}{\cos (u + v) \cos (u - v)}; \qquad \cos \psi = \frac{\sin (u - v) \sin (u + v)}{\cos (u - v) \cos (u + v)}.$$

Die Gleichung der W-Fläche, bezogen auf ihre Krümmungslinien, ist also:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2} \sqrt{\cos 2u \cos 2v} \arcsin \sqrt{\frac{\cos 2u}{\cos 2u + \cos 2v}} \\ y &= -\tfrac{1}{2} \sin (u - v) \arcsin \sqrt{\frac{\cos 2u}{\cos 2u + \cos 2v}} \\ &\quad -\tfrac{1}{4} \arcsin \frac{\sin (u + v)}{\cos (u - v)} \\ z &= -\tfrac{1}{2} \sin (u + v) \arcsin \sqrt{\frac{\cos 2u}{\cos 2u + \cos 2v}} \\ &\quad -\tfrac{1}{4} \arcsin \frac{\sin (u - v)}{\cos (u + v)}. \end{aligned}\right\}$$

§ 8. Diskussion der Fläche.

Die Diskussion der durch die Gleichungen 20) dargestellten Fläche in gewöhnlicher Weise durch Schnitte parallel den Koordinatenebenen dürfte sich kaum durchführen lassen. Erstens erfordert diese Art der Diskussion außerordentlich viel Rechenarbeit und zweitens dürfte es unseres Erachtens kaum möglich sein, auf diese Weise die mannigfaltigen periodischen Wiederholungen zu überblicken. Dagegen bietet die Einführung neuer Parameter in die Flächengleichung ein bequemes Mittel zur Diskussion. Es lassen sich nämlich die Koordinaten x, y, z eines Flächenpunktes durch diejenigen X, Y, Z des entsprechenden Punktes der Einheitskugel ausdrücken. Wir können die Gleichungen 20) in der Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{4} X\psi \\ y &= -\tfrac{1}{4} Y\psi - \frac{t}{4} \\ z &= -\tfrac{1}{4} Z\psi - \frac{s}{4}. \end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

s, t und ψ ergeben sich nach den Gleichungen 19) aus:

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} s; \quad \frac{Z}{X} = \operatorname{tg} t; \quad \frac{X}{YZ} = \operatorname{tg} \psi$$

zu:

$$s = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}; \quad t = \operatorname{arctg} \frac{Z}{X}; \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{X}{YZ}.$$

Wir wollen für diese zyklometrischen Funktionen die abkürzenden Bezeichnungen s, t, ψ auch weiterhin beibehalten. Bezogen auf die Parameter X, Y, Z werden die Koordinaten unserer Fläche:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{4} X \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{YZ}\right) \\ y &= -\tfrac{1}{4} Y \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{YZ}\right) - \tfrac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{Z}{X}\right) \\ z &= -\tfrac{1}{4} Z \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{YZ}\right) - \tfrac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right), \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

wobei $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$.

Diese Art der Darstellung zeigt uns den Zusammenhang zwischen den Koordinaten unserer Flächenpunkte und denen der entsprechenden Punkte der Einheitskugel. Man hat nur zu untersuchen, in welche Flächenstücke gehen die Oktanten der Kugel über, und es ist augenscheinlich, daß diese Art der Diskussion, die W-Fläche durch eine Transformation aus der Kugel zu erhalten, infolge der geometrischen Vorstellung, die man dadurch gewinnt, viel leichter zum Ziele führen wird als die zuerst angegebene. Bestimmt man die Flächenstücke, welche einzelnen Teilen der Kugel entsprechen, so erkennt man bald, daß es für die Symmetrieverhältnisse der Fläche vorteilhaft ist, eine Drehung des Koordinatensystems um 45^0 um die x-Achse vorzunehmen. Die Transformationsformeln lauten:

$$\begin{aligned} x' &= x & x &= x' \\ y' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(y+z) & y &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(y'-z') \\ z' &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(z-y) & z &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(y'+z'). \end{aligned}$$

Führen wir diese Drehung gleich aus, so ist die Gleichung unserer Fläche im System x', y', z':

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{4}\,X \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{YZ}\right) \\ y' &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\left[(Y+Z)\operatorname{arctg}\left(\frac{X}{YZ}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{Z}{X}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)\right] \\ z' &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\left[(Z-Y)\operatorname{arctg}\left(\frac{X}{YZ}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{Z}{X}\right)\right] \end{aligned}\right\}$$

oder in den abgekürzten Bezeichnungen:

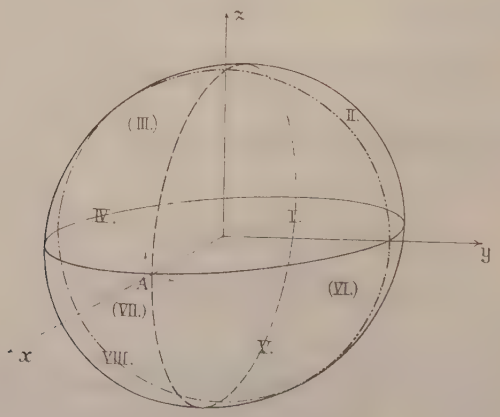
$$\left.\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{4}\,X\psi \\ y' &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,((Y+Z)\,\psi + t + s) \\ z' &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,((Z-Y)\,\psi + s - t), \end{aligned}\right\} \qquad 24)$$

wobei $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$.

Beachtet man, daß man die Flächenpunkte dadurch erhält, daß man auf der durch den Punkt s, t der yz-Ebene

gehenden Geraden des Normalensystems eine Strecke $\frac{\psi}{4}$ aufträgt, welche also gleich ist $\frac{1}{4}$ des im Bogenmaß gemessenen Winkels der Parameterkurven im entsprechenden Kugelpunkt, so erkennt man, daß jede Änderung dieses Winkels um $\pm 2k\pi$ (k eine ganze Zahl) nur ein Fortschreiten auf der Normalen um $\frac{k\pi}{2}$ bedeutet, d. h. den Übergang von einem Flächenstück zu einem Parallelflächenstück. Wir werden sehen, daß diese Flächenstücke alle untereinander zusammenhängen und in ihrer Gesamtheit erst die W-Fläche bilden. Es genügt aber zunächst, eine dieser Parallelflächen zu untersuchen, d. h. dem Winkel ψ der Parameterkurven nur positive und negative Werte beizulegen, die in den vier ersten Quadranten liegen.

Zunächst soll untersucht werden, welche Fläche einer einmaligen Umwanderung der Kugel entspricht. Die 8 Oktanten der Kugel seien in der in nachfolgender Figur angegebenen Weise numeriert. Die ausgezogene Kurve ist der Äquator $Z = 0$, der gestrichelte Kreis der Meridian $Y = 0$, der strichpunktierte Kreis der Meridian $X = 0$. Diese Unterscheidung ist auch für die diesen Kreisen entsprechenden Kurven auf der Fläche verwendet und in allen Figuren beibehalten.



Wie bereits anfangs bemerkt, zählen wir die Bogen s von A aus auf dem Äquator, die Bogen t von A aus auf dem Meridian und zwar positiv in Richtung der Pfeile, negativ in der entgegengesetzten Richtung.

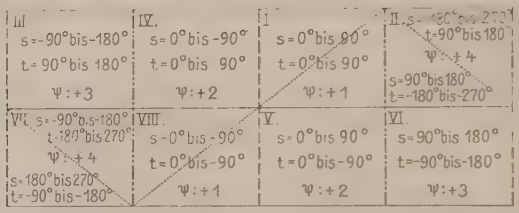
Es handelt sich nun darum, die jedem Oktanten zukommenden Werte von s, t, ψ zu bestimmen. Für den I. Oktanten hat s die Werte von 0^0 bis 90^0, und t liegt ebenfalls zwischen 0^0 und 90^0; damit bestimmt sich ψ aus $\cos\psi = \sin s \sin t$ und $\operatorname{tg}\psi = \frac{X}{YZ}$ als im $+1$. Quadranten liegend. In analoger Weise hat man dies für die anderen Oktanten durchzuführen und findet dann:

Oktant	s	t	ψ (Quadrant)
I.	0^0 bis 90^0	0^0 bis 90^0	$+1$
II.	90^0 „ 180^0	90^0 „ 180^0	$+4$
III.	-90^0 „ -180^0	90^0 „ 180^0	$+3$
IV.	0^0 „ -90^0	0^0 „ 90^0	$+2$
V.	0^0 „ 90^0	0^0 „ -90^0	$+2$
VI.	90^0 „ 180^0	-90^0 „ -180^0	$+3$
VII.	-90^0 „ -180^0	-90^0 „ -180^0	$+4$
VIII.	0^0 „ -90^0	0^0 „ -90^0	$+1$

Damit zeigt sich dann, daß die Flächenstücke I, III, IV, V, VI, VIII in derselben Weise unter sich zusammenhängen wie auf der Kugel, daß nur die Oktanten II und VII abgetrennt sind. Um vollständige Symmetrie zu erhalten, führen wir noch den größten Kreis $Y = Z$ der Kugel ein, welcher durch die Oktanten VII, VIII, I, II hindurchgeht (in der Folge die punktierte Linie) und wählen die Werte s und t so, wie es in dem umstehenden Schema dargelegt ist.

In diesem Schema entsprechen die Rechtecke den Oktanten der Kugel und es ergibt sich aus demselben sehr einfach der Zusammenhang zwischen den entsprechenden Flächenstücken. Die dem ψ beigeschriebene Zahl bedeutet den Quadranten, dem ψ angehört. Wie aus dem Schema ersichtlich ist, hängen die Teile der Fläche genau in derselben Weise und längs der-

selben Kurven untereinander zusammen wie die entsprechenden Teile der Kugel. Der Zusammenhang zwischen III, IV, I, VIII, V, VI unter sich war vorhin schon erreicht; durch die Einführung der Kurve $Y = Z$ hängt nun II zur Hälfte mit VI, zur Hälfte mit III, und VII zur Hälfte mit III, zur Hälfte mit VI zusammen. Ein Zusammenhang findet nicht statt längs der strichpunktierten Kurven zwischen I und II und zwischen VII und VIII, ferner längs der durch II und VII gehenden punktierten Linien. Längs dieser Kurven hängen, wie wir sehen werden, die Flächenstücke mit ihren periodischen Fortsetzungen zusammen. Man sieht, die Hauptschwierigkeit der



gestaltlichen Untersuchung der Fläche besteht nach Einführung der Parameter X, Y, Z in die Flächengleichung in der richtigen Wahl von s, t, ψ für die einzelnen Oktanten. Die übrige Diskussion bietet keine besonderen Schwierigkeiten mehr. Die zahlenmäßige Aufstellung der den Oktanten der Kugel entsprechenden Flächenstücke möge für den I. Oktanten mit $s = 0^0$ bis 90^0, $t = 0^0$ bis 90^0 und ψ im $+1$. Quadranten durchgeführt werden. In der folgenden Tabelle sind die den Kreisen $Z = 0$, $Z = \frac{1}{3}$, $Z = \frac{2}{3}$, $Z = 1$, soweit sie im I. Oktanten liegen, entsprechenden Kurvenstücke aufgesucht, indem zu je vier Punkten eines solchen Kreisquadranten die zugehörigen Flächenpunkte berechnet sind.

$Z=0$	X	1,000	0,866	0,500	0	$Z=\frac{2}{3}$	X	0,745	0,646	0,373	0
	Y	0	0,500	0,866	1,000		Y	0	0,373	0,646	0,745
	s	0	0,524	1,047	1,571		s	0	0,524	1,047	1,571
	t	0	0	0	1,571		t	0,730	0,801	1,061	1,571
	ψ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0		ψ	$\frac{\pi}{2}$	1,204	0,714	0
	x'	−0,393	−0,340	−0,196	0		x'	−0,292	−0,194	−0,066	0
	y'	0	−0,231	−0,425	−0,556		y'	−0,315	−0,455	−0,538	−0,556
	z'	0	+0,046	+0,055	0		z'	−0,056	−0,014	−0,001	0
$Z=\frac{1}{3}$	X	0,943	0,818	0,470	0	$Z=1$	X	0			0
	Y	0	0,470	0,818	0,943		Y	0			0
	s	0	0,521	1,049	1,571		s	0			$\frac{\pi}{2}$
	t	0,340	0,388	0,617	1,571		t	$\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{2}$
	ψ	$\frac{\pi}{2}$	1,382	1,045	0		ψ	$\frac{\pi}{2}$			0
	x'	−0,370	−0,283	−0,123	0		x'	0			0
	y'	−0,153	−0,356	−0,506	−0,556		y'	−0,556			−0,556
	z'	−0,033	+0,009	+0,013	0		z'	0			0

In analoger Weise sind derartige Tabellen zu berechnen für die Oktanten II, III, IV. Sind diese vier Oktanten erledigt, so ergeben sich die Flächenstücke V, VI, VII, VIII ohne weitere Zahlenrechnung. Bei VIII ist gegenüber I nur das Zeichen von s und t geändert, während ψ ungeändert ist. Es wechseln aber auch beim Übergang von I zu VIII Y und Z das Zeichen, während X das Zeichen behält. Aus den Gleichungen 24) ergibt sich, daß infolgedessen y' und z' ihr Vorzeichen ändern, während x' ungeändert bleibt. Dasselbe Verhalten zeigen die Oktanten IV und V, III und VI, II und VII.

Damit ist der Flächenteil gefunden, der einer einmaligen Umwanderung der Kugel entspricht. In Figur 1 ist derselbe durch Aufriß und Grundriß und einen Vertikalschnitt durch die Symmetrielinie dargestellt. Dabei ist, wie auch in allen folgenden Figuren, durch die Art des Striches das Entsprechen

zwischen den Kurven der Fläche und denen der Kugel ausgedrückt.

Die nächste Aufgabe ist nun, die periodischen Wiederholungen dieser Ausgangsfläche zu bestimmen. Ändert man den Bogen s um $+ 2k\pi$, t um $- 2k\pi$ (wo k eine positive oder negative ganze Zahl ist), so erhält man die periodischen Fortsetzungen des Flächenstückes über die durch die Oktanten II und VII gehenden punktierten Kurven hinaus. Die um $\pm 2k\pi$ geänderten Parameterwerte s und t gehören zu denselben Punkten der Einheitskugel wie s und t selbst, und bewirken daher weder eine Änderung der zugehörigen Werte X, Y, Z noch eine Zeichenänderung von ψ. Die Gleichungen 24) zeigen, daß für diese periodische Änderung der Parameter x' und y' ungeändert bleiben, während z' sich um $-\frac{1}{8}\sqrt{2}\cdot 4k\pi = -2{,}222\,k$ ändert. Die Punkte, die zu den neuen Parameterwerten gehören, sind also um $-2{,}222$ in Richtung der z'-Achse gegen die Punkte der Ausgangsfläche verschoben. Die Verschiebung beträgt ein ganzes Vielfaches der Entfernung der beiden punktierten Grenzkurven der Ausgangsfläche, so daß man für die ∞^1 Werte k eine Fläche erhält, die durch ein fortwährendes Aneinanderreihen zur Ausgangsfläche kongruenter Flächen in Richtung der z'-Achse entsteht. Durch das in Figur 2 dargestellte perspektivische Bild, das nach oben und unten ins Unendliche fortgesetzt zu denken ist, wird der bisher diskutierte Teil der Fläche veranschaulicht. Darin sind die den Kugelkurven entsprechenden Flächenkurven, soweit sie sichtbar sind, eingezeichnet.

Legt man die Punkte der Kugel dadurch fest, daß man an Stelle der Parameter s und t die um $2k\pi$ geänderten Parameter $s + 2k\pi$ und $t + 2k\pi$ wählt, so ändert sich damit weder X, Y, Z noch ψ und nach den Gleichungen 24) geht y' über in $y' - \frac{1}{8}\sqrt{2}\cdot 4k\pi = y' - 2{,}222\,k$, während x' und z' ungeändert bleiben. Das bedeutet aber nur eine Verschiebung der Punkte in Richtung der y'-Achse um ein Vielfaches der doppelten Breite AB in der Ausgangsfläche (Fig. 1). Man hat sich also lauter solche durch Figur 2 dargestellte Flächen-

streifen längs der y'-Achse angeordnet zu denken in der Weise, daß zwischen den einzelnen Teilen Abstände gleich der doppelten Strecke AB, von Mitte zu Mitte gemessen, sich befinden.

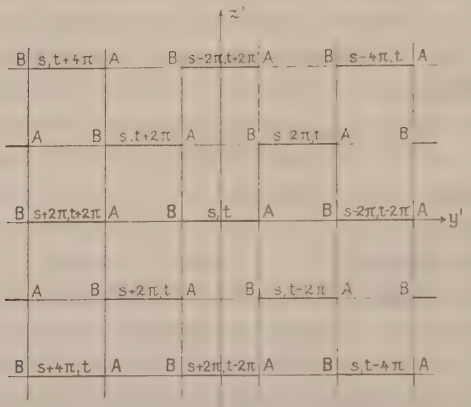
Damit sind aber noch nicht alle Möglichkeiten bezüglich der Wahl der Parameter s und t erschöpft. Es fehlt z. B. noch das den Werten s und $t + 2\pi$ entsprechende Flächenstück. Um die Flächenteile dieser Art zu erhalten, ist noch zu untersuchen, wie sich die Koordinaten der Flächenpunkte ändern, wenn einer der beiden Parameter s und t ungeändert bleibt, der andere sich um $2k\pi$ ändert. Für s und $t + 2k\pi$ ergibt sich nach den Gleichungen 24) eine Verschiebung der Ausgangsfläche um $-\frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot 2k\pi = -1{,}111 \cdot k$ in Richtung der y'-Achse und um $+\frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot 2k\pi = +1{,}111 \cdot k$ in Richtung der z'-Achse, während man für $s + 2k\pi$ und t dieselbe Verschiebung längs der y'-Achse, aber eine solche um $-\frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot 2k\pi = -1{,}111k$ in Richtung der z'-Achse erhält. Man erkennt aber sofort, daß dieses letztere Flächenstück bereits erhalten wurde, indem man bei der schon vorhandenen Fläche mit $s + 2k\pi$ und $t - 2k\pi$ den ersten Parameter ungeändert läßt, den zweiten um $2k\pi$ vermehrt. Durch diese einseitige Änderung der Parameter erhält man also ein weiteres System paralleler Flächenstreifen, das kongruent zum ersten ist. Dasselbe liegt so, daß die Streifen die Zwischenräume in dem ersterhaltenen System einnehmen, nur ist das zweite System gegen das erste um die halbe Entfernung entsprechender Flächenpunkte in Richtung der z'-Achse verschoben.

Man erkennt die Anordnung wohl am besten aus dem Schema Seite 32 oben:

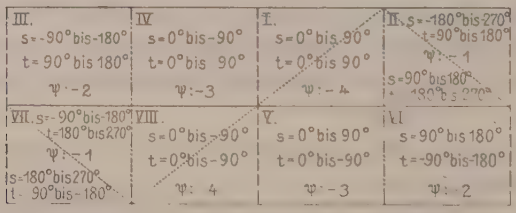
Man hat sich die $y'z'$-Ebene in der gezeichneten Weise in ein Netz von Quadraten mit der Seitenlänge $AB = 1{,}111$ Einheiten geteilt zu denken und über jeder der stark ausgezogenen Strecken BA eine Fläche zu errichten, welche kongruent ist der in Figur 1 dargestellten Ausgangsfläche und gegen diese in der Weise verschoben ist, wie es die Verschiebung von BA angibt. Bei jeder Strecke BA sind die dem

zugehörigen Flächenstück entsprechenden Werte von s und t eingetragen.

Wir haben nun alle Flächenteile gefunden, welche positiven Werten von ψ in den vier ersten Quadranten entsprechen. Wir hätten aber bei der ersten Umwanderung der Kugel mit



demselben Rechte dem ψ negative Werte innerhalb der vier ersten Quadranten beilegen können und hätten damit an Stelle des Schemas auf Seite 28 das folgende erhalten:



ψ hat sich also gegenüber der ersten Anordnung in jedem Quadranten um -2π geändert, so daß nach Gleichung 14) die neu zu erhaltenden Flächenteile Parallelflächen im Abstande $\frac{\pi}{2}$ zu den bereits erhaltenen sind. Zur gestaltlichen Untersuchung der dieser Wahl von ψ entsprechenden Flächenteile

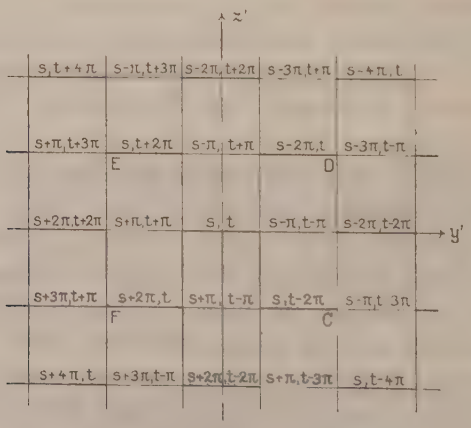
bedarf es keiner weiteren Zahlenrechnung mehr. Ändert man z. B. die einem Punkte des III. Oktanten zugehörenden Parameterwerte s in $s + \pi$ und t in $t - \pi$, so kommt man damit auf den diametral gegenüberliegenden Punkt im V. Oktanten. Damit ändern X, Y, Z nur das Zeichen, ebenso ψ. Diesem Punkte entspricht nach den Gleichungen 24) ein Flächenpunkt, der gegen das Bild des im III. Oktanten gewählten Punktes nur um $-2\pi \cdot \frac{1}{8}\sqrt{2} = -1{,}111$ in Richtung der z'-Achse verschoben ist. Macht man dies für alle Punkte des Oktanten III mit den Werten s, t, ψ der Tabelle Seite 28, so bekommt man damit die Punkte des Oktanten V mit den Werten s, t, ψ der Tabelle Seite 32. Der Oktant V wird also durch eine Verschiebung des Oktanten III der in Figur 1 dargestellten Ausgangsfläche um $-1{,}111$ in Richtung der z'-Achse erhalten. Dasselbe gilt für alle Oktanten oberhalb der punktierten Linie in Tabelle Seite 28, die damit übergehen in die unterhalb dieser Linie liegenden Flächenteile in Tabelle Seite 32. Analog zeigt eine Änderung der Parameter s in $s - \pi$ und t in $t + \pi$, daß man die Flächenteile, die den Oktanten oberhalb der punktierten Linie in Tabelle Seite 32 entsprechen, durch eine Verschiebung derjenigen Flächenteile der Ausgangsfläche um 1,111 in Richtung der z'-Achse erhält, die den unterhalb der punktierten Linie in Tabelle Seite 28 liegenden Oktanten entsprechen.

Damit ergibt sich für eine erstmalige Umlaufung der Kugel unter Annahme negativer Werte von ψ das durch Figur 3 dargestellte Flächenstück, das aus denselben kongruenten Hälften besteht, wie die in Figur 1 dargestellte Ausgangsfläche, nur hängen sie diesmal anders zusammen.

Man könnte nun in genau derselben Weise wie vorhin zeigen, daß allen möglichen Änderungen der s und t um $\pm 2k\pi$ wieder ein System von ∞^2 Flächenstücken entspricht, die alle zu der eben konstruierten Fläche kongruent sind. Dieses System ist vollständig kongruent mit dem auf Seite 31 erhaltenen, nur ist zu beachten, daß die Numerierung der einzelnen Oktanten diesmal eine andere ist. Man erhält dasselbe

in seiner Lage zu dem ursprünglichen System so, daß man über den schwach ausgezogenen horizontalen Quadratseiten AB des Schemas Seite 32 ebenfalls Flächen errichtet, die kongruent sind zu der in Figur 1 gezeichneten Ausgangsfläche.

Damit sind aber alle periodischen Wiederholungen unserer Fläche berücksichtigt, die sich ergeben, solange man ψ positive und negative Werte innerhalb der vier ersten Quadranten beilegt. Man stellt sich die Entstehung dieser Fläche wohl am besten in der Weise vor, daß man sich die ganze $y'z'$-Ebene in Quadrate von der Seitenlänge $AB = 1{,}111$ Einheiten geteilt denkt und über jeder solchen Quadratseite die durch Figur 1 dargestellte Ausgangsfläche (ohne Rücksicht auf die ihr zugehörenden Werte s, t, ψ natürlich) errichtet denkt. Die Anordnung möge durch folgendes Schema veranschaulicht werden, in das die betreffenden Werte von s und t eingetragen sind. Die Flächenstücke über den stark ausgezogenen horizontalen Quadratseiten entsprechen positiven, die über den schwach ausgezogenen negativen Werten von ψ.



Die bisher gefundenen ∞^2 Flächenstücke entsprechen allen möglichen Werten von s und t, aber nur positiven und negativen Werten von ψ in den vier ersten Quadranten. Jedes

dieser Flächenstücke besteht aus 8 Oktanten, die in derselben Weise unter sich zusammenhängen wie die Oktanten der Kugel. Nur längs der in der $y'z'$-Ebene gelegenen strichpunktierten Kurven, die Teilen des größten Kreises $X = 0$ entsprechen, findet kein vollständiger Zusammenhang statt. Längs dieser Kurven setzen nun die Flächenstücke an, die wir für eine Vermehrung des Winkels ψ der Parameterkurven der Kugel um $\pm 2\pi$ erhalten. Für jede Vermehrung von ψ um $\pm 2\pi$ erhalten wir eine Parallelfläche zu der bereits aufgestellten Flächenserie. Wir wollen nun eine Ausgangsfläche für diese zweite Serie, die Werten von ψ im $\pm 5.$ bis $\pm 8.$ Quadranten entspricht, aufstellen und ihren Zusammenhang mit der ersten Serie untersuchen. Für positive Werte von ψ ist die Zusammenstellung der Werte s, t, ψ für eine einmalige Umwanderung der Kugel in dem Schema Seite 28 gegeben, nur ist das ψ immer in einem um vier höheren Quadranten zu nehmen. Man braucht die zahlenmäßige Ausrechnung wieder nur für die vier ersten Oktanten auszuführen, was durch eine ähnliche Tabelle wie auf Seite 29 geschieht. Man erhält für eine einmalige Umwanderung der Kugel die in Figur 4 in Aufriß, Grundriß und durch den Symmetrieschnitt dargestellte Fläche. Die Figur 4 ist im halben Maßstab wie die bisherigen Figuren gezeichnet. Durch die fein gestrichelten Kurven sind die Flächenteile der ersten Serie in ihrer Lage zur zweiten angedeutet. In den Figuren 1, 3 und 4 ist weniger Rücksicht genommen auf die Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit einzelner Teile als vielmehr auf das Entsprechen zwischen Flächen- und Kugelkurven. Nur die Kurven CE und DF sind in Figur 4, weil rückwärts liegend, etwas schwächer ausgezogen.

Den Zusammenhang mit der ersten Serie erkennt man, wenn man beachtet, daß das mit $CDEF$ bezeichnete Flächenstück der Figur 4 gerade über dem mit denselben Buchstaben bezeichneten Rechteck des Schemas Seite 34 sich erhebt, also drei Horizontal- und Vertikalstreifen der ersten Serie überdeckt. Die neue Fläche hängt dabei längs der Kurve CD mit den durch die Parameterwerte s, $t - 2\pi$ und $s - 2\pi$, t

bestimmten Flächen der ersten Serie und längs der Kurve EF mit den den Parameterwerten $s, t + 2\pi$ und $s + 2\pi, t$ zugehörigen Teilen dieser Serie zusammen.

Hinsichtlich ihrer Gestalt ist sie ganz analog der in Figur 1 dargestellten Fläche gebildet, nur ist der aus den Teilen I, IV, VIII und V gebildete Teil verhältnismäßig viel größer, der übrige Teil kleiner als bei Figur 1. Ein wesentlicher Unterschied ist der, daß nur bei der ersten Serie Flächenstücke I, II, VII, VIII auftreten, bei welchen ein Quadrant des Kugelkreises $X = 0$ in einen Punkt übergegangen ist, während dies bei der zweiten und allen folgenden Serien nicht mehr der Fall ist. Alle ∞^2 periodischen Wiederholungen innerhalb der zweiten Serie erhält man durch Änderung der Werte s, t in derselben Weise wie bei der ersten Serie.

In ganz analoger Weise ergibt sich nun für jede Vermehrung des Winkels ψ um $\pm 2\pi$ eine neue Serie von ∞^2 kongruenten Flächenstücken, welche immer mit der vorhergehenden längs der dem Kreis $X = 0$ entsprechenden strichpunktierten Kurven der $y'z'$-Ebene zusammenhängt. Die Gesamtheit aller dieser ∞^3 Flächenstücke bildet unsere W-Fläche.

Man erkennt jetzt erst, welche bedeutende Erleichterung für die Diskussion dieser komplizierten Fläche der Übergang zu den Parametern X, Y, Z bedeutete, was uns die ganze Fläche als eine Transformation der einzelnen Oktanten der Kugel gab. Dabei ist die Zahlenrechnung eine nicht besonders umfangreiche; es brauchen für jede Serie der Fläche nur vier Oktanten der Kugel umgerechnet zu werden.

Es sollen noch in Kürze die den größten Kreisen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $Y = Z$ und $Y = -Z$ entsprechenden Kurven betrachtet werden. Für $X = 0$ wird $x' = 0$, d. h. alle dem größten Kreis $X = 0$ entsprechenden Kurven liegen in der $y'z'$-Ebene; es sind die Schnitte der Fläche mit dieser Koordinatenebene. Einem vollen Umlauf des Kreises $X = 0$ entspricht eine geschlossene Kurve. Da für alle Punkte eines Quadranten dieses Kreises s und t konstant sind, so werden für $\psi = 0$ die entsprechenden Kurven zu Punkten; denn nach den Glei-

chungen 24) sind $x' = 0$, y' und $z' = \text{const}$. Dieser Fall kann nur in der ersten Serie auftreten, wie schon oben bemerkt.

Um die Kurven $Z = 0$ zu untersuchen, gehen wir auf das noch nicht gedrehte Koordinatensystem x, y, z zurück. Da für $Z = 0 : t = k\pi$ und $\psi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ist (k eine positive oder negative ganze Zahl), so folgt aus Gleichung 22):

$$x = -\tfrac{1}{4} X\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$y = -\tfrac{1}{4} Y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \tfrac{1}{4} k\pi$$

$$z = -\tfrac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right),$$

also:

$$\left.\begin{aligned} z &= -\tfrac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{y + \frac{k\pi}{4}}{x}\right) \\ x^2 + \left(y + \frac{k\pi}{4}\right)^2 &= \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2. \end{aligned}\right\}$$

Die dem Kreise $Z = 0$ entsprechenden Kurven der Fläche sind also Schraubenlinien auf Rotationszylindern. Dasselbe läßt sich natürlich für die dem Kreis $Y = 0$ entsprechenden Kurven beweisen.

Eine ausgezeichnete Rolle spielen noch die größten Kreise $Y - Z = 0$ und $Y + Z = 0$. Für den erstern erhält man als z'-Koordinate der Punkte der entsprechenden Kurven:

$$z' = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,(s - t),$$

und da sich für die Punkte des Kugelkreises $Y = Z$ s und t nur um eine Konstante unterscheiden, so sind die diesem Kreis entsprechenden Kurven ebene Kurven. Es sind die horizontalen Symmetrielinien der einzelnen Flächenstücke. Für $Y + Z = 0$ ist $y' = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,(s + t)$; es unterscheiden sich aber für Punkte dieses Kreises s und t außer um konstante Beträge noch durch

das Vorzeichen, so daß $y' = \text{const.}$ wird. Dem größten Kreise $Y + Z = 0$ entsprechen die vertikalen Symmetrielinien der einzelnen Flächenstücke.

Die bisher diskutierte Fläche ist vollständig symmetrisch in Bezug auf die Ebene $z' = 0$ oder $y = z$ im alten System, entsprechend der Symmetrie der Kugel in Bezug auf den größten Kreis $Y = Z$. Genau dieselbe Symmetrie in Bezug auf die Ebene $y' = 0$ (bzw. $y + z = 0$ im alten System), die der Symmetrie der Kugel in Bezug auf die Ebene $Y + Z = 0$ entspricht, erhält man dadurch, daß man den Sinn der Zählung für einen der beiden Bogen s oder t ändert. Dabei kommt man auf dieselbe Fläche, ob man den Sinn der Zählung für s oder für t ändert; während eine Änderung des Richtungssinnes für s und t zugleich wieder die ursprünglich erhaltene Fläche ergibt, was sich durch Ableitung der den Formeln 24) entsprechenden Formeln für die geänderten s und t unmittelbar zeigen läßt.

Zählen wir also die Bogen s von A (Figur Seite 26) nach links positiv, t wie bisher nach oben positiv, so werden hiefür unsere Ausgangsfunktionen Seite 20:

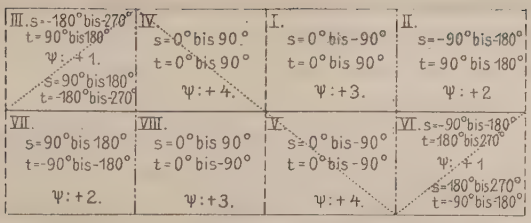
$$\begin{aligned} f &= -\sin s & \varphi &= -\sin t \\ f_1 &= -\cos s & \varphi_1 &= 0 \\ f_2 &= 0 & \varphi_2 &= \cos t \end{aligned}$$

und die Punktgleichungen der W-Fläche:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{4} X \psi \\ y' &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,((Y+Z)\psi + t - s) \\ z' &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,((Z-Y)\psi - s - t), \end{aligned}\right\} \qquad 25)$$

wobei wieder $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$.

Die Werte von s, t, ψ, welche bei einem erstmaligen Umlaufe der Kugel den einzelnen Oktanten zukommen, sind durch folgendes Schema gegeben:

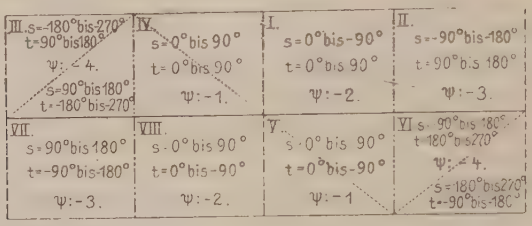


Dabei sind die Oktanten III und VI (analog wie früher II und VII durch die Kurve $Y = Z$) durch den größten Kreis $Y = -Z$ in zwei Hälften getrennt, um vollständige Symmetrie bei dem entsprechenden Flächenstück zu erhalten.

Das einer derartigen Einteilung der Kugel entsprechende Flächenstück erhält man nun unmittelbar aus der dem Schema Seite 32 zugehörigen und durch Figur 3 dargestellten Ausgangsfläche. Eine Gegenüberstellung der Oktanten I der gesuchten Fläche und IV dieser Vergleichsfläche zeigt, daß für beide die Werte s, t, X und Z dieselben sind, ψ und Y dagegen sich durch das Vorzeichen unterscheiden. Nun erhält man die Koordinaten der Punkte der neuen Fläche durch die Gleichungen 25), während man für die Vergleichsfläche die Gleichungen 24) zu benützen hatte. Bei Berücksichtigung der Vorzeichen der Werte s, t, ψ, X, Y, Z zeigt sich aber, daß für die Punkte des Oktanten I der neuen Fläche die Koordinaten x', y', z' bzw. gleich sind den Koordinaten $-x'$, $-z'$, $-y'$ der Punkte des Oktanten IV der Vergleichsfläche. Dasselbe Verhalten zeigen die Oktanten II, III, IV, V, VI, VII, VIII der neuen Fläche gegen die Oktanten III, II, I, VIII, VII, VI, V der Vergleichsfläche. Man erhält also die neue Ausgangsfläche durch eine Drehung der bereits erhaltenen Fläche um 90^0 um die x'-Achse im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers und eine darauffolgende Spiegelung der ganzen Fläche an der y'-Achse.

Wählt man statt der positiven Werte von ψ in obigem Schema negative Werte innerhalb der vier ersten Quadranten,

so sind die Werte s, t, ψ den einzelnen Kugeloktanten durch folgendes Schema zugewiesen:



und die zugehörige Fläche erhält man in analoger Weise wie soeben dadurch, daß man die dem Schema Seite 28 zugehörige und in Figur 1 dargestellte Ausgangsfläche um 90^0 um die x'-Achse im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers dreht und dann noch an der y'-Achse spiegelt.

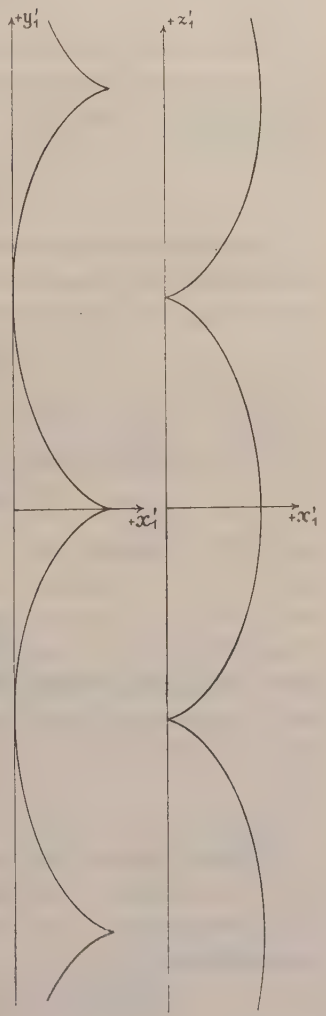
Auf dieselbe Weise erhält man natürlich alle periodischen Wiederholungen dieser neuen Flächenstücke, sowie die den Werten von ψ in höheren Oktanten entsprechenden Flächenteile aus der bereits konstruierten Fläche.

Die dem gewählten Richtungssinn der Bogen s und t entsprechende Fläche ist also vollständig kongruent zu der zuerst diskutierten Fläche, nur hat sie eine andere Lage gegen das Koordinatensystem. Bezogen auf das System x, y, z weist sie dieselbe Symmetrie auf in Bezug auf die Ebene $y = -z$, wie die erste Fläche in Bezug auf die Ebene $y = z$. Zu beachten ist aber, daß die Numerierung der einzelnen Oktanten eine andere ist als bei der ersten Fläche.

Die Zentrafläche dieser neuen Fläche ist dieselbe wie die der ersten; es vertauschen sich nur der erste und zweite Mantel, was sich durch Aufstellung der Gleichungen sofort erkennen läßt.

Man könnte noch nach den Flächen fragen, die man erhält, wenn man als Ausgangspunkt für die Zählung der Bogen s und t den dem Punkt A (Figur Seite 26) diametral gegenüberliegenden Schnittpunkt der beiden größten Kreise, den Durch-

stoßpunkt der negativen x-Achse mit der Kugel wählt. Die Rechnung zeigt aber sehr bald, daß man in diesem Falle Flächen erhält, die identisch sind mit den bereits diskutierten; nur die Numerierung der einzelnen Oktanten ist wieder eine andere. Da diese Wahl des Ausgangspunktes also keine neuen Flächenteile liefert, so mögen die hierauf bezüglichen Rechnungen, die den bisherigen ganz analog sind, hier weggelassen werden.



Viel einfacher gestaltet sich die Diskussion für die beiden Mäntel der Zentrafläche. Transformiert man die Gleichungen 21) in das gedrehte Koordinatensystem x', y', z', so ergeben sich für die beiden Mäntel die Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \tfrac{1}{8}(\cos(t+s)+\cos(t-s))\\
y_1' &= \tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin(t+s)-(t+s))\\
z_1' &= \tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin(t-s)+(t-s))\\
x_2' &= -\tfrac{1}{8}(\cos(t+s)+\cos(t-s))\\
y_2' &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin(t+s)+(t+s))\\
z_2' &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin(t-s)-(t-s)).
\end{aligned}
$$

Setzt man:

$$
\begin{aligned}
t+s &= \lambda\\
t-s &= \mu,
\end{aligned}
$$

so ist:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \tfrac{1}{8}(\cos\lambda+\cos\mu)\\
y_1' &= \tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin\lambda-\lambda)\\
z_1' &= \tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin\mu+\mu)\\
x_2' &= -\tfrac{1}{8}(\cos\lambda+\cos\mu)\\
y_2' &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin\lambda+\lambda)\\
z_2' &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin\mu-\mu).
\end{aligned}
$$

Die beiden Zentraflächen sind daher Rückungsflächen mit ebenen Translationskurven. Für $\mu = 0$ ergibt sich die Schnittkurve des ersten Mantels mit der $x_1' y_1'$-Ebene:

$$x_1' = \tfrac{1}{8}(1 + \cos\lambda)$$
$$y_1' = \tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin\lambda - \lambda).$$

Zunächst erkennt man, daß eine Vertauschung von λ in $-\lambda$ nur einen Zeichenwechsel des y_1' zur Folge hat. Eine Änderung von λ um $2k\pi$ ändert x_1' nicht und bewirkt eine Verschiebung der Punkte in Richtung der y_1'-Achse um:

$$-\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\cdot 2k\pi = -1{,}111\,k.$$

Sind die Koordinaten der Kurvenpunkte für $\lambda = 0$ bis π berechnet, so erhält man die y_1' für λ zwischen 2π und π durch Subtraktion der zuerst erhaltenen von:

$$y_1' = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\cdot 2\pi = -1{,}111,$$

da für $\lambda : 2\pi - \lambda$ gesetzt:

$$x_1' = \tfrac{1}{8}(1 + \cos\lambda)$$
$$y_1' = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin\lambda - \lambda) - \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\cdot 2\pi$$

wird. Man braucht also nur Punkte der Kurve zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = \pi$ zu berechnen. Es ergibt sich die in der ersten der Figuren auf Seite 41 dargestellte Kurve. Die Schnittkurve dieses Mantels der Zentrafläche mit der $x_1' z_1'$-Ebene ist eine zu der eben aufgestellten Kurve kongruente Kurve. Dies läßt sich in folgender Weise zeigen. Ihre Gleichung ist:

$$x_1' = \tfrac{1}{8}(1 + \cos\mu)$$
$$z_1' = \tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin\mu + \mu).$$

Spiegelt man die Kurve an der z_1'-Achse, so ist das Zeichen von x_1' zu ändern. Nimmt man nun eine Verschiebung des Koordinatensystems vor, die gegeben ist durch die Transformationsformeln:

$$x_1' = x_1'' - \tfrac{1}{4}, \qquad z_1' = z_1'' + \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\pi,$$

so ist:

$$x_1'' = -\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}\cos\mu + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}\cos\mu$$
$$z_1'' = \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\sin\mu + \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,\mu - \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\,\pi.$$

Für:

$$\mu = \mu' + \pi$$

ergibt sich:

$$x_1'' = \tfrac{1}{8}(1 + \cos\mu')$$
$$z_1'' = -\tfrac{1}{8}\sqrt{2}(\sin\mu' - \mu').$$

Diese Gleichungen sind aber identisch (bis auf das Vorzeichen) mit denen der ersten Kurve. Die gegenseitige Lage der beiden Kurven folgt aus den Figuren Seite 41.

Der zweite Mantel der Zentrafläche wird durch Translation derselben Kurven erzeugt; es ändert sich nur die Lage gegen das Koordinatensystem. Die beiden Mäntel der Zentrafläche sind Translationsflächen, die aufeinander und auf das imaginäre Rotationsparaboloid abwickelbar sind.

Schließlich könnte man noch die durch die Gleichungen 12) und 13) definierten Flächen Θ und Θ' erwähnen, die den beiden Mänteln der Zentrafläche durch Orthogonalität der Elemente entsprechen. Man erhält:

$$\Theta = -\tfrac{1}{2}(\sin s + \sin t) \qquad \Theta' = -\tfrac{1}{2}(\sin s - \sin t)$$
$$\Theta_1 = \tfrac{1}{2}\cos s \qquad \Theta_1' = \tfrac{1}{2}\cos s$$
$$\Theta_2 = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad \Theta_2' = -\tfrac{1}{2}\cos t.$$

Die beiden Flächen sind Translationsflächen 4. Ordnung, deren Rückungskurven Kreise in aufeinander senkrechten Ebenen sind.

3. Abschnitt.

Die Rotationsflächen mit der Relation $2(R_1 - R_2) = \sin 2(R_1 + R_2)$ zwischen den Hauptkrümmungsradien.

§ 9. Integration der Differentialgleichung dieser Flächen.

Bei der Frage nach den Rotationsflächen unserer Flächenklasse versagt zunächst die vorhin angewandte Methode, die zwei Paare von je drei Funktionen, für die die Summe der Quadrate $= 1$ ist, speziell zu wählen.

Der einfachste Weg, diese Rotationsflächen zu erhalten, ist der, zu dem bereits bekannten Meridian der Zentrafläche:[1])

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,r \\ z &= -\frac{1-a^2}{2}\arcsin\frac{r}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{r}{2}\sqrt{1-a^2-r^2} \end{aligned}\right\} \quad 26)$$

den Meridian der W-Fläche als Evolvente zu bestimmen. Man kann ferner nach der von Herrn v. Braunmühl in der Abhandlung: „Über die reduzierte Länge eines geodätischen Bogens und die Bildung jener Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren“[2]) gegebenen Methode zu dem in Gleichung 26) gegebenen einen Mantel der Zentrafläche die Originalflächen bestimmen und unter diesen die Rotationsflächen auswählen.

[1]) Vgl. die Seite 1, Anmerkung 1 zitierte Abhandlung von Weingarten.

[2]) Abhandlungen d. K. Bayer. Akademie d. Wiss., II. Kl., XIV. Bd., III. Abt.

Wir wollen hier den Weg einschlagen, auf dem sich uns zuerst eine spezielle Rotationsfläche unserer Gattung ergab, nämlich die direkte Integration der Differentialgleichung dieser Flächen. Diese wird für Rotationsflächen eine totale, und die Durchführung zeigt zugleich, wie sich unter Umständen eine anscheinend komplizierte Differentialgleichung verhältnismäßig einfach integrieren läßt. Der eine Hauptkrümmungsradius in einem Punkte P einer Rotationsfläche ist gleich dem Krümmungsradius des Meridians in P, der andere gleich der Länge der Normalen PN der Rotationsfläche vom Punkte P bis zum Schnitt N mit der Rotationsachse, also:

$$R_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}^3}{\frac{d^2z}{dx^2}}; \qquad R_2 = \frac{x\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\frac{dz}{dx}}.$$

Wir erhalten somit die totale Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$2\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}^3}{\frac{d^2z}{dx^2}} - \frac{x\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\frac{dz}{dx}}\right)$$

$$= \sin 2\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}^3}{\frac{d^2z}{dx^2}} + \frac{x\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\frac{dz}{dx}}\right).$$

Führt man die Substitution ein:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = r(x),$$

so ist:

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{r^2 - 1}; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}}\frac{dr}{dx},$$

und die Differentialgleichung wird:

$$2\left(\frac{r^2\sqrt{r^2-1}}{\frac{dr}{dx}}-\frac{xr}{\sqrt{r^2-1}}\right)=\sin 2\left(\frac{r^2\sqrt{r^2-1}}{\frac{dr}{dx}}+\frac{xr}{\sqrt{r^2-1}}\right),$$

oder, wenn man r als unabhängige Variable betrachtet:

$$2\left(r^2\sqrt{r^2-1}\frac{dx}{dr}-\frac{xr}{\sqrt{r^2-1}}\right)=\sin 2\left(r^2\sqrt{r^2-1}\frac{dx}{dr}+\frac{xr}{\sqrt{r^2-1}}\right).$$

Man kann, um die Lösung dieser komplizierten Differentialgleichung zu gewinnen, folgende Überlegung anstellen: Damit die Relation besteht, muß das Argument unter dem sin ein arcsin ϱ sein, während die linke Seite dann ϱ selbst sein muß, wo ϱ eine Funktion von r ist. Damit der Ausdruck unter dem sin die Form arcsin ϱ hat, muß entweder x einen arc sin enthalten oder $\frac{dx}{dr}$; das letztere hat aber auch wieder zur Folge, daß x einen arcsin enthält. Es wird also x von der Form sein: $x = A \cdot \arcsin \varrho$, wo A eine Funktion von r ist. A ergibt sich dann aus der Überlegung, daß links arcsin ϱ verschwinden muß, so daß wir zwischen den beiden Koeffizienten von arcsin ϱ auf der linken Seite die Gleichung haben:

$$r^2\sqrt{r^2-1}\frac{dA}{dr}=\frac{Ar}{\sqrt{r^2-1}}$$

oder:

$$\frac{dA}{A}=\frac{dr}{r(r^2-1)}$$

$$A=C\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}.$$

Bis jetzt hat also x die Form:

$$x=C\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}\arcsin\varrho.$$

Nun muß unter dem sin der arcsin ϱ den Faktor „1“ haben, also muß, da es nur auf die Glieder mit dem Faktor arcsin ϱ ankommt, sein:

$$\arcsin \varrho = 2\,(C \arcsin \varrho + C \arcsin \varrho),$$

d. h.:

$$C = \tfrac{1}{4}.$$

Ferner müssen wir beachten, daß, da ϱ eine noch unbekannte Funktion von r ist, wir durch die Differentiation Glieder erhalten, die sich wieder hinausheben müssen. Dies erreichen wir dadurch, daß wir noch eine vorderhand unbekannte Funktion $f(r)$ von r zu dem bis jetzt erhaltenen Werte von x hinzufügen, so daß x folgendermaßen lautet:

$$x = \tfrac{1}{4} \frac{\sqrt{r^2-1}}{r} \arcsin \varrho + f(r).$$

Bestimmt man hieraus $\frac{dx}{dr}$ und führt dies in die Differentialgleichung ein, so kommt:

$$2\left(\frac{r(r^2-1)}{4} \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}} \frac{d\varrho}{dr} + r^2\sqrt{r^2-1}\frac{df}{dr} - \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} f(r)\right)$$

$$= \sin 2\left(\frac{\arcsin \varrho}{2} + \frac{r(r^2-1)}{4} \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}} \frac{d\varrho}{dr} + r^2\sqrt{r^2-1}\frac{df}{dr} + \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} f(r)\right).$$

Da, wie bereits oben gesagt, die linke Seite ϱ werden muß, die rechte $\sin(\arcsin \varrho)$, so haben wir für ϱ und f die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 2\left(r^2\sqrt{r^2-1}\frac{df}{dr} - \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} f(r)\right) &= \varrho - \frac{r(r^2-1)}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}} \frac{d\varrho}{dr} \\ 2\left(r^2\sqrt{r^2-1}\frac{df}{dr} + \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} f(r)\right) &= -\frac{r(r^2-1)}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}} \frac{d\varrho}{dr}. \end{aligned}\right\}$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{4r}{\sqrt{r^2-1}} f(r) = -\varrho$$

$$f(r) = -\frac{\varrho\sqrt{r^2-1}}{4r}; \quad \frac{df}{dr} = -\frac{\varrho}{4} \frac{1}{r^2\sqrt{r^2-1}} - \frac{\sqrt{r^2-1}}{4r} \frac{d\varrho}{dr}.$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir:

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}\right)\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{-2\,dr}{r(r^2-1)}.$$

Durch Integration ergibt sich:

$$1 + \sqrt{1-\varrho^2} = \frac{C r^2}{r^2-1}$$

und damit:

$$\varrho = \frac{r}{r^2-1}\sqrt{2Cr^2 - 2C - C^2 r^2}.$$

Setzt man die Konstante $C = 2a^2$, so wird:

$$\varrho = \frac{2ar}{r^2-1}\sqrt{r^2(1-a^2)-1}$$

und:

$$f(r) = -\frac{a}{2\sqrt{r^2-1}}\sqrt{r^2(1-a^2)-1}.$$

Also ist:

$$x = \tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{r^2-1}}{r}\arcsin\frac{2ar}{r^2-1}\sqrt{r^2(1-a^2)-1}$$

$$-\frac{a}{2\sqrt{r^2-1}}\sqrt{r^2(1-a^2)-1},$$

und hieraus:

$$\frac{dx}{dr} = \frac{a\sqrt{r^2(1-a^2)-1}}{2r(r^2-1)\sqrt{r^2-1}} + \frac{\arcsin\dfrac{2ar}{r^2-1}\sqrt{r^2(1-a^2)-1}}{4r^2\sqrt{r^2-1}}.$$

Aus: $$\frac{dz}{dx} = \sqrt{r^2-1}$$

ergibt sich dann:

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{r^2-1}\,\frac{dx}{dr}$$

und damit:

$$z = \int\left(\frac{a}{2}\frac{\sqrt{r^2(1-a^2)-1}}{r(r^2-1)} + \frac{1}{4r^2}\arcsin\frac{2ar}{r^2-1}\sqrt{r^2(1-a^2)-1}\right)dr.$$

Wendet man auf den zweiten Teil des Integrals die partielle Integration an und faßt die beiden dann vorhandenen Integrale zusammen, so erhält man:

$$z = -\frac{1}{4r}\arcsin\frac{2ar}{r^2-1}\sqrt{r^2(1-a^2)-1}$$
$$+\frac{a(1-a^2)}{2}\int\frac{r\,dr}{(r^2-1)\sqrt{r^2(1-a^2)-1}},$$

und durch Ausführung des letztern Integrales bekommt man schließlich:

$$z = \frac{1-a^2}{2}\arcsin\frac{\sqrt{r^2(1-a^2)-1}}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{r^2-1}}$$
$$-\frac{1}{4r}\arcsin\frac{2ar}{r^2-1}\sqrt{r^2(1-a^2)-1}+C.$$

Die beiden Ausdrücke für x und z werden einfacher, wenn man an Stelle des Parameters r einen neuen Parameter r' einführt, so daß:

$$r = \frac{\sqrt{1-r'^2}}{\sqrt{1-a^2-r'^2}}.$$

Dann ergibt sich:

$$x = -\frac{a}{2}r' + \frac{a}{4}\frac{1}{\sqrt{1-r'^2}}\arcsin 2r'\sqrt{1-r'^2}$$

$$z = -\frac{\sqrt{1-a^2-r'^2}}{4\sqrt{1-r'^2}}\arcsin 2r'\sqrt{1-r'^2} + \frac{1-a^2}{2}\arcsin\frac{r'}{\sqrt{1-a^2}}+C.$$

Beachtet man, daß:

$$\arcsin 2r'\sqrt{1-r'^2} = 2\arcsin r'$$

ist und setzt man der Einfachheit wegen für $-r'$ wieder r, so ergibt sich als schließliche Gleichung des Meridians unserer W-Flächen:

$$x = \frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\arcsin r\right)$$

$$z = \frac{\sqrt{1-a^2-r^2}}{2\sqrt{1-r^2}}\arcsin r - \frac{1-a^2}{2}\arcsin\frac{r}{\sqrt{1-a^2}}+C.$$

Die Konstante C bedeutet nur eine Verschiebung der Fläche in Richtung der Rotationsachse und kann daher in der Folge $= 0$ angenommen werden. Die Gleichung der Rotationsflächen unserer Flächenklasse ist somit:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\arcsin r\right)\cos\frac{v}{a} \\ y &= \frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\arcsin r\right)\sin\frac{v}{a} \\ z &= \frac{\sqrt{1-a^2-r^2}}{2\sqrt{1-r^2}}\arcsin r - \frac{1-a^2}{2}\arcsin\frac{r}{\sqrt{1-a^2}}. \end{aligned}\right\} \quad 27)$$

Dabei ist für reelle Flächen $a < 1$.

Die Richtungskosinus der Normalen, die Fundamentalgrößen 1. und 2. Ordnung und die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 berechnen sich hieraus zu:

$$X = -\frac{a}{\sqrt{1-r^2}}\cos\frac{v}{a};\quad Y = -\frac{a}{\sqrt{1-r^2}}\sin\frac{v}{a};\quad Z = \frac{\sqrt{1-a^2-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}.$$

$$E = \frac{a^2 r^2}{4(1-a^2-r^2)(1-r^2)}\left(r + \frac{\arcsin r}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2;$$

$$F = 0;\quad G = \tfrac{1}{4}\left(r - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\arcsin r\right)^2.$$

$$L = \frac{-a^2 r^2}{2(1-a^2-r^2)\sqrt{1-r^2}^3}\left(r + \frac{\arcsin r}{\sqrt{1-r^2}}\right);$$

$$M = 0;\quad N = \frac{1}{2\sqrt{1-r^2}}\left(r - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\arcsin r\right).$$

$$R_1 = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{2}\left(r + \frac{\arcsin r}{\sqrt{1-r^2}}\right);\quad R_2 = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2}\left(r - \frac{\arcsin r}{\sqrt{1-r^2}}\right).$$

Diese Ausdrücke bestätigen unmittelbar, daß die Relation $2(R_1 - R_2) = \sin 2(R_1 + R_2)$ zwischen den Hauptkrümmungsradien besteht.

Für die beiden Mäntel der Zentrafläche ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\,r\cos\frac{v}{a} \\ y_1 &= a\,r\sin\frac{v}{a} \\ z_1 &= -\frac{r\sqrt{1-a^2-r^2}}{2} - \frac{1-a^2}{2}\arcsin\frac{r}{\sqrt{1-a^2}} \end{aligned}\right\} \quad 28)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ y_2 &= 0 \\ z_2 &= \frac{r\sqrt{1-a^2-r^2}}{2} - \frac{1-a^2}{2}\arcsin\frac{r}{\sqrt{1-a^2}}, \end{aligned}\right\} \quad 29)$$

von denen der erste auf das imaginäre Rotationsparaboloid:

$$z = -i\,\frac{x^2+y^2}{2}$$

abwickelbar ist, während der zweite natürlich in die Rotationsachse ausartet.

§ 10. Diskussion des Meridians der Original- und Zentrafläche.

Im Folgenden sollen die Meridiane der Original- und Zentrafläche gestaltlich untersucht werden. Wir wollen dies für den speziellen Fall $a = \frac{1}{2}$ durchführen. Damit ergibt sich als Gleichung des Meridians der Originalfläche:

$$x = \tfrac{1}{4}\left(r - \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\arcsin r\right)$$

$$z = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}-r^2}}{2\sqrt{1-r^2}}\arcsin r - \tfrac{3}{8}\arcsin\frac{2r}{\sqrt{3}},$$

der Zentrafläche:

$$x_1 = \frac{r}{2}$$

$$z_1 = -\frac{r\sqrt{\frac{3}{4}-r^2}}{2} - \tfrac{3}{8}\arcsin\frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Bei der letzteren ist die Elimination von r möglich und:

$$z_1 = -x_1\sqrt{\tfrac{3}{4} - 4x_1^2} - \tfrac{3}{8}\arcsin\frac{4x_1}{\sqrt{3}}$$

ist die Gleichung des Meridians der Zentrafläche in x_1 und z_1. Man erhält die Ordinaten $-z_1$ durch Addition der Ordinaten:

$$z_1' = \tfrac{3}{8}\arcsin\frac{4x_1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad z_1'' = x_1\sqrt{\tfrac{3}{4} - 4x_1^2}.$$

Die erste Kurve läßt sich sofort zeichnen, die zweite erhält man am raschesten, indem man einige Punkte für Werte von x zwischen 0 und $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ berechnet. Die letztere Kurve besteht aus vier symmetrischen Teilen. Ihre Untersuchung liefert Horizontaltangenten in den Punkten:

$$x_1 = \pm\tfrac{1}{8}\sqrt{6} = \pm 0{,}306, \quad z_1'' = \pm 0{,}188;$$

Vertikaltangenten für:

$$x_1 = \pm\tfrac{1}{4}\sqrt{3}, \quad z_1'' = 0,$$

während ein Wendepunkt für $x_1 = 0$, $z_1'' = 0$ auftritt. (Gestrichelte geschlossene Kurve in Figur 5.) Die Ordinaten z_1' und z_1'' für gleiche Abszissen addiert und in Richtung der negativen z-Achse aufgetragen, liefern dann den Meridian der Zentrafläche. Bei dieser Addition ist folgendes zu beachten: $\frac{4x_1}{\sqrt{3}}$ ist der sin des Bogens $\frac{8}{3}z_1'$. Also ist:

$$\cos\tfrac{8}{3}z_1' = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\tfrac{3}{4} - 4x_1^2},$$

d. h. der Wurzelfaktor von z_1'' ist proportional dem $\cos\frac{8}{3}z_1'$, hat also das positive Zeichen, wenn $\frac{8}{3}z_1'$ im $\pm$ 1. oder $\pm$ 4. Quadranten liegt, dagegen das negative Zeichen, wenn $\frac{8}{3}z_1'$ im $\pm$ 2. oder $\pm$ 3. Quadranten liegt. Dasselbe gilt für die um $4n$ (n eine ganze Zahl) höheren Quadranten. Im ersten Falle wird daher z_1'' für positive x_1 positiv, für negative x_1 negativ, im zweiten Falle umgekehrt. Entsprechend diesen Bemerkungen sind die Ordinaten z_1'' zu denen z_1' algebraisch zu addieren. Auf

diese Weise erhält man den in Figur 5 strichpunktierten Meridian der Zentrafläche, der Horizontaltangenten für $x_1 = \pm \frac{1}{4}\sqrt{3}$, Wendepunkte in den Schnittpunkten mit der Rotationsachse hat, während Vertikaltangenten nicht auftreten.

Die Gleichungen des Meridians der Originalfläche zeigen, daß bei diesem Periodizität sowohl in Richtung der x-Achse als der z-Achse vorhanden ist. Bezeichnet man zur Abkürzung $\arcsin r$ mit ψ, $\arcsin \frac{2r}{\sqrt{3}}$ mit φ, so bewirkt eine Änderung von φ um $\pm 2k\pi$ nur eine Verschiebung der Ausgangskurve in Richtung der z-Achse um $\mp \frac{3}{8} \cdot 2k\pi = \mp 2{,}36\,k$. Wählen wir also zunächst für $\arcsin r$ nur Werte innerhalb der vier ersten Quadranten, so erhalten wir ein Kurvenstück, das sich in Richtung der z-Achse in Abständen $= 2{,}36$ wiederholt. Legt man dem r positive Werte bei und nimmt für φ die Werte im 1. Quadranten, so bekommt man punktweise die in Figur 5 mit AB bezeichnete Ausgangskurve. Als Winkel, deren $\sin = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ist, hätten aber auch die Supplementswinkel $\pi - \varphi$ der eben gewählten genommen werden können. Dabei ist zu beachten, daß $\sqrt{\frac{3}{4} - r^2}$ proportional dem $\cos\varphi$ ist, also für $\pi - \varphi$ das Zeichen ändert. Die x-Koordinaten der neuen Punkte sind also dieselben wie bei dem Stück AB, während die zugehörigen Werte von z durch Subtraktion der ursprünglichen z von $-\frac{3\pi}{8}$ erhalten werden. Das diesen Werten von φ entsprechende Kurvenstück ist also symmetrisch zu AB in Bezug auf die Gerade $z = -\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2}$.

Für negative Werte von r vertauschen sowohl x als z das Zeichen; man erhält daher ein zum bisher konstruierten Teil in Bezug auf den Anfangspunkt symmetrisches Kurvenstück. Damit ist der Meridian zwischen $z = -\frac{3}{8}\pi$ und $+\frac{3}{8}\pi$ bestimmt und alle Änderungen von φ um $\pm 2k\pi$ sind berücksichtigt, wenn man dieses Kurvenstück in Richtung der z-Achse immer

um sich selbst verschiebt. Bezüglich der besondern Punkte der Kurve zeigt der erste Differentialquotient $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3 - 4r^2}}$, daß Horizontaltangenten nicht auftreten, Vertikaltangenten dagegen für $r = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Wendepunkte sind im reellen Gebiet nicht vorhanden; in den Schnittpunkten des Meridians mit der Rotationsachse ist sein Krümmungsradius $= 0$.

Es ist nun zu untersuchen, was eine Änderung des Winkels $\psi = \arcsin r$ um $\pm 2k\pi$ bewirkt. Wir wollen dies allgemein an den Gleichungen 27) der Fläche zeigen. Dieselben gehen über in:

$$x = \left(\frac{a}{2}r - \frac{a}{2\sqrt{1-r^2}}\arcsin r \mp \frac{ak\pi}{\sqrt{1-r^2}}\right)\cos\frac{v}{a}$$

$$y = \left(\frac{a}{2}r - \frac{a}{2\sqrt{1-r^2}}\arcsin r \mp \frac{ak\pi}{\sqrt{1-r^2}}\right)\sin\frac{v}{a}$$

$$z = -\frac{1-a^2}{2}\arcsin\frac{r}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{\sqrt{1-a^2r^2}}{2\sqrt{1-r^2}}\arcsin r \pm \frac{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}k\pi.$$

Unter Berücksichtigung der Werte der Richtungskosinus der Normalen der Fläche (Seite 50) ersieht man, daß eine Änderung von ψ um $\pm 2k\pi$ eine Verschiebung des Punktes um $\pm k\pi$ auf der Flächennormale bewirkt, also den Übergang von der Ausgangsfläche zu einer Parallelfläche im Abstande $\pm k\pi$. Also wird in unserem speziellen Beispiel die Änderung des Winkels ψ um $\pm 2k\pi$ Parallelkurven zu der bereits diskutierten im Abstand $\pm k\pi$ geben. Damit erhält man die Parallelflächen der Ausgangsfläche in den Abständen $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ etc. Nach unseren allgemeinen Erörterungen auf Seite 15 sind aber alle Parallelflächen zur Ausgangsfläche, die in Abständen $= \frac{\pi}{2}$ aufeinanderfolgen, Teile unserer W-Fläche. Wir bekommen die Meridiane dieser zwischenliegenden Flächenteile, wenn wir statt des Winkels $\psi = \arcsin r$ den Winkel $\pi - \psi \pm 2k\pi$ wählen. Dadurch ändert $\sqrt{1-r^2} = \cos\psi$ sein Zeichen und die Formeln 27) zeigen unmittelbar, daß die hiedurch erhaltenen

Flächenteile die Parallelflächen der Ausgangsfläche in den Abständen $\pm \frac{\pi}{2}$, $\pm \frac{3\pi}{2}$ etc. sind. Die Gesamtheit aller erhaltenen Meridiankurven erzeugt durch Rotation unsere spezielle W-Fläche.

In Figur 5 sind außer dem Meridian der Ausgangsfläche noch die Meridiane der beiden Parallelflächen im Abstande $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ gezeichnet.

§ 11. Anwendung der in den §§ 1 und 2 angeführten Methoden auf die Rotationsflächen unserer Flächenklasse.

Nachträglich können nun auch die Raumkurven konstanter Torsion bzw. die sphärischen Kurven bestimmt werden, die als Ausgangskurven für die Aufstellung der Rotationsflächen nach der Methode von Darboux bzw. Weingarten dienen. Um die ersteren zu erhalten, bezieht man die beiden Mäntel der Zentrafläche zunächst auf ihre Haupttangentenkurven als Parameterlinien. Wenn man aus den Gleichungen 28) die Fundamentalgrößen für den ersten Mantel berechnet, so ergibt sich die Gleichung der Haupttangentenkurven in der Gestalt:

$$dv \pm \frac{a\,dr}{\sqrt{1-a^2-r^2}} = 0.$$

Die neuen Parameter sind daher:

$$s = v + a \arcsin \frac{r}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$t = v - a \arcsin \frac{r}{\sqrt{1-a^2}},$$

während r und v sich in s und t durch die Formeln ausdrücken:

$$r = \sqrt{1-a^2} \sin \frac{s-t}{2a}$$

$$v = \frac{s+t}{2}.$$

Damit werden die Koordinaten der Punkte des ersten Mantels:

$$x_1 = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}\left(\sin\frac{s}{a} - \sin\frac{t}{a}\right)$$

$$y_1 = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}\left(-\cos\frac{s}{a} + \cos\frac{t}{a}\right)$$

$$z_1 = \frac{1-a^2}{4}\left(-\frac{s}{a} + \frac{t}{a}\right) - \frac{1-a^2}{4}\sin\frac{s-t}{a}.$$

Für den zweiten Mantel gilt dieselbe Transformation und es ist:

$$x_2 = 0$$

$$y_2 = 0$$

$$z_2 = \frac{1-a^2}{4}\left(-\frac{s}{a} + \frac{t}{a}\right) + \frac{1-a^2}{4}\sin\frac{s-t}{a}.$$

Die Mittelfläche zwischen beiden hat demnach die Koordinaten:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{4}\left(\sin\frac{s}{a} - \sin\frac{t}{a}\right)$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{4}\left(-\cos\frac{s}{a} + \cos\frac{t}{a}\right)$$

$$z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1-a^2}{4}\left(-\frac{s}{a} + \frac{t}{a}\right).$$

Das ist eine Translationsfläche, die der Ort der Mitten der Verbindungslinien aller Punkte der Kurven mit den Gleichungen:

$$X_1 = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}\sin\frac{s}{a} \qquad X_2 = -\frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}\sin\frac{t}{a}$$

$$Y_1 = -\frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}\cos\frac{s}{a} \qquad Y_2 = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}\cos\frac{t}{a}$$

$$Z_1 = -\frac{1-a^2}{2}\frac{s}{a} \qquad Z_2 = \frac{1-a^2}{2}\frac{t}{a} \qquad \text{ist.}$$

Diese Gleichungen stellen aber zwei Schraubenlinien von der Torsion -2 und $+2$ auf dem Kreiszylinder vom Radius

$\frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$ dar. Für gleiche Werte von s und t erhält man Punkte, die zueinander symmetrisch liegen in Bezug auf den Anfangspunkt. Man erhält also die Rotationsflächen unter unsern W-Flächen, wenn man als Raumkurven konstanter Torsion diese Schraubenlinien eines Kreiszylinders wählt.

Nicht ganz so einfach ist die Bestimmung der sphärischen Kurven C_1 und C_2, die auf die Rotationsflächen führen. Die Richtungskosinus der Binormalen der oben gefundenen Schraubenlinien sind:

$$\left.\begin{aligned} f &= \sqrt{1-a^2}\cos\frac{s}{a}; \quad f_1 = \sqrt{1-a^2}\sin\frac{s}{a}; \quad f_2 = a \\ \varphi &= \sqrt{1-a^2}\cos\frac{t}{a}; \quad \varphi_1 = \sqrt{1-a^2}\sin\frac{t}{a}; \quad \varphi_2 = a. \end{aligned}\right\} \quad 30)$$

Die sphärischen Kurven müssen diese Größen als Richtungskosinus der Tangenten besitzen. Der Gang der Rechnung ist demnach der folgende: Mit Hilfe der Gleichungen 30) lassen sich die Koordinaten eines Kugelpunktes in den Parametern s und t ausdrücken:

$$X = \frac{a\cos\frac{s+t}{2a}}{\sqrt{1-(1-a^2)\sin^2\frac{s-t}{2a}}}; \quad Y = \frac{a\sin\frac{s+t}{2a}}{\sqrt{1-(1-a^2)\sin^2\frac{s-t}{2a}}};$$

$$Z = \frac{-\sqrt{1-a^2}\cos\frac{s-t}{2a}}{\sqrt{1-(1-a^2)\sin^2\frac{s-t}{2a}}}.$$

Dabei sind die Kurven $s = \text{const.}$ und $t = \text{const.}$ größte Kreise der Kugel. Es handelt sich nun darum, die orthogonalen Trajektorien dieser beiden Systeme von geodätischen Linien zu bestimmen. Die Kurve C_1 gehört dann dem System der orthogonalen Trajektorien zu $s = \text{const.}$ an, die Kurve C_2

dem System der orthogonalen Trajektorien zu $t = \text{const.}$ Es möge die Rechnung für das erste System durchgeführt werden.

Die Fundamentalgrößen 1. Ordnung der Kugel sind:

$$E = -\frac{1}{4\left(1-(1-\alpha^2)\sin^2\frac{s-t}{2\alpha}\right)^2};\quad F = \frac{1-2(1-\alpha^2)\sin^2\frac{s-t}{2\alpha}}{4\left(1-(1-\alpha^2)\sin^2\frac{s-t}{2\alpha}\right)^2};$$

$$G = \frac{1}{4\left(1-(1-\alpha^2)\sin^2\frac{s-t}{2\alpha}\right)^2}.$$

Man erhält dann die Orthogonaltrajektorien der Kurven $s = \text{const.}$ durch die Quadratur:

$$\varphi = \int\left(-\frac{F}{\sqrt{G}}\,ds - \sqrt{G}\,dt\right).$$

Der Ausdruck unter dem Integral muß ein totales Differential sein; wir integrieren zunächst $-\int\sqrt{G}\,dt$ partiell nach t. Der Wert für $\sqrt{G}$ eingesetzt, ergibt:

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-(1-\alpha^2)\sin^2\frac{s-t}{2\alpha}},$$

woraus:

$$\varphi = \arcsin\frac{\alpha\sin\frac{s-t}{2\alpha}}{\sqrt{1-(1-\alpha^2)\sin^2\frac{s-t}{2\alpha}}} + \psi(s)$$

folgt. Die Zusatzfunktion $\psi(s)$ bestimmt sich aus der Bedingung, daß:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\frac{1-2(1-\alpha^2)\sin^2\frac{s-t}{2\alpha}}{2\left(1-(1-\alpha^2)\sin^2\frac{s-t}{2\alpha}\right)}$$

sein muß, zu:

$$\psi(s) = -s,$$

so daß:

$$\varphi = \arcsin \frac{a \sin \frac{s-t}{2a}}{\sqrt{1-(1-a^2)\sin^2\frac{s-t}{2a}}} - s \qquad 31)$$

die Bedingung zwischen den Parametern s und t gibt, die für die Orthogonaltrajektorien der Kreise $s = \text{const.}$ erfüllt sein muß.

Um diese Kurven in rechtwinkligen Koordinaten zu erhalten, braucht man nur in den Gleichungen für die Kugel die Bedingung zwischen s und t einzuführen. Aus Gleichung 31) folgt:

$$\sin\frac{s-t}{2a} = \frac{\sin(s+\varphi)}{\sqrt{a^2+(1-a^2)\sin^2(s+\varphi)}}$$

$$\cos\frac{s-t}{2a} = \frac{a\cos(s+\varphi)}{\sqrt{a^2+(1-a^2)\sin^2(s+\varphi)}}$$

$$\sin\frac{s+t}{2a} = \sin\frac{s}{a}\cdot\frac{a\cos(s+\varphi)}{\sqrt{a^2+(1-a^2)\sin^2(s+\varphi)}} - \cos\frac{s}{a}\cdot\frac{\sin(s+\varphi)}{\sqrt{a^2+(1-a^2)\sin^2(s+\varphi)}}$$

$$\cos\frac{s+t}{2a} = \cos\frac{s}{a}\cdot\frac{a\cos(s+\varphi)}{\sqrt{a^2+(1-a^2)\sin^2(s+\varphi)}} + \sin\frac{s}{a}\cdot\frac{\sin(s+\varphi)}{\sqrt{a^2+(1-a^2)\sin^2(s+\varphi)}}$$

$$\sqrt{1-(1-a^2)\sin^2\frac{s-t}{2a}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+(1-a^2)\sin^2(s+\varphi)}}.$$

Damit erhält man für die Orthogonaltrajektorien:

$$X_1 = a\cos\frac{s}{a}\cos(s+\varphi) + \sin\frac{s}{a}\sin(s+\varphi)$$

$$Y_1 = a\sin\frac{s}{a}\cos(s+\varphi) - \cos\frac{s}{a}\sin(s+\varphi)$$

$$Z_1 = -\sqrt{1-a^2}\cos(s+\varphi).$$

Da der Richtungskosinus der Kurventangente gegen die z-Achse konstant $= \alpha$ ist, so schließt diese mit der z-Achse einen konstanten Winkel ein; die Kurven sind also gleichzeitig allgemeine Schraubenlinien und sphärische Kurven.

Für unsern speziellen Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ erhält man für $q = 0$:

$$X_1 = \tfrac{1}{2} \cos 2s \cos s + \sin 2s \sin s$$
$$Y_1 = \tfrac{1}{2} \sin 2s \cos s - \cos 2s \sin s = \sin^3 s$$
$$Z_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cos s,$$

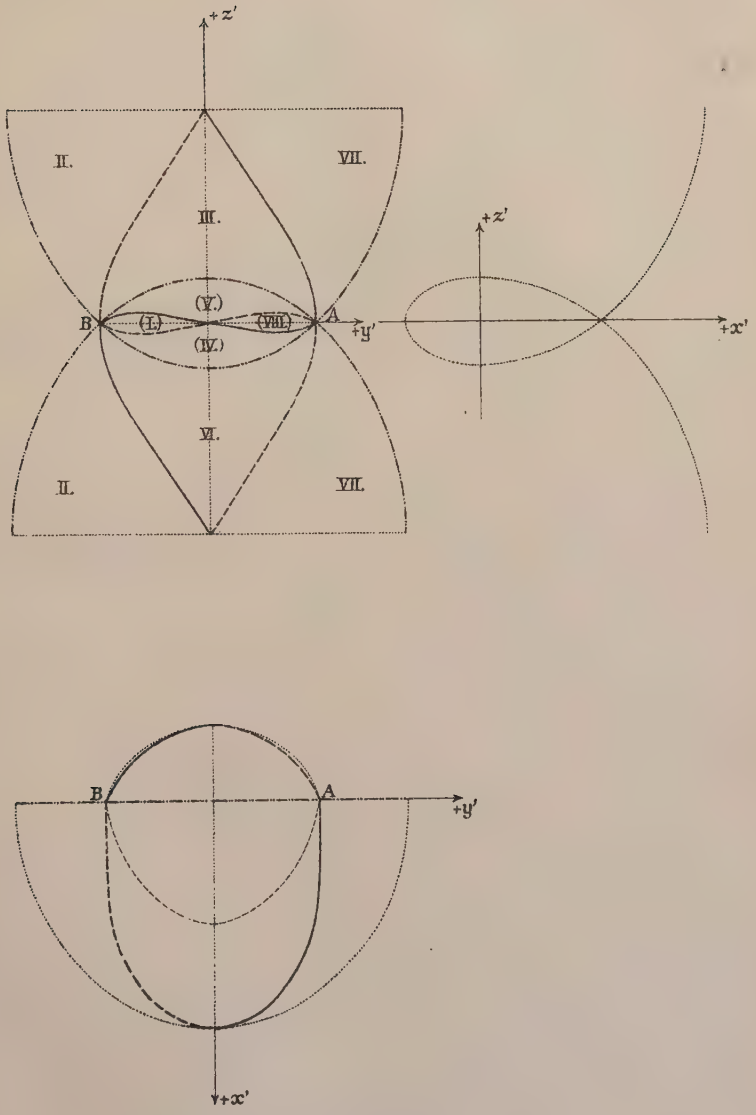
so daß die Raumkurve als Schnitt der Einheitskugel mit dem Zylinder 6. Ordnung über der Kurve:

$$27\, Y_1^2 = (3 - 4\, Z_1^2)^3$$

erhalten wird.

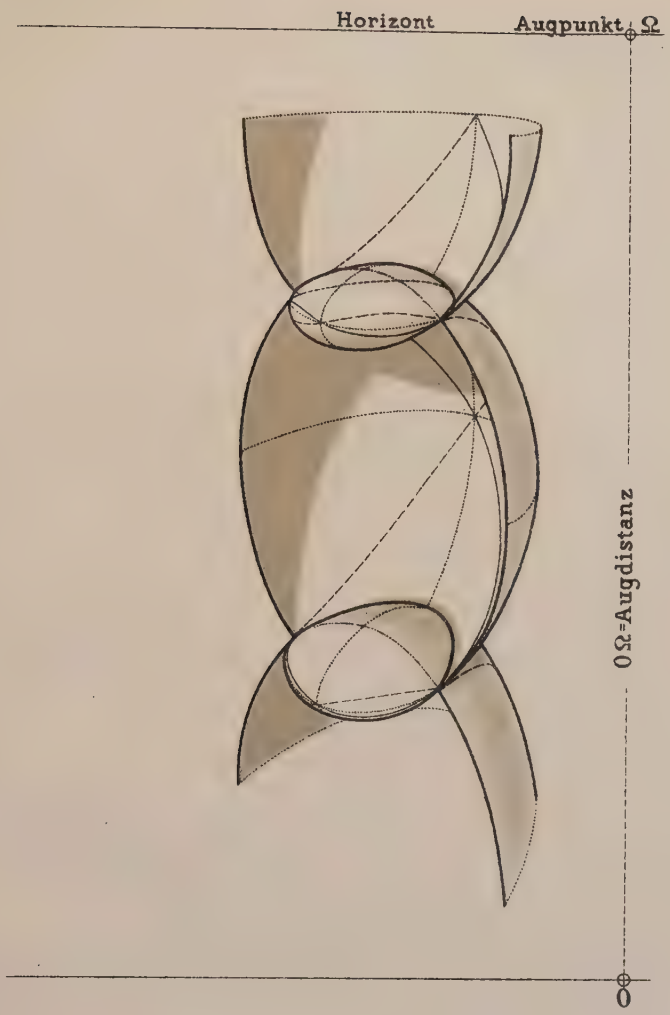
In analoger Weise berechnen sich die Orthogonaltrajektorien zu $t = \text{const.}$, denen die Kurve C_2 angehört.

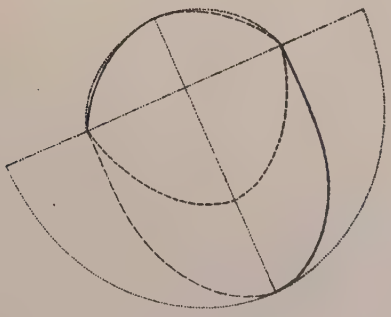
Fig. 1.



Lith. Hubert Köhler, München.

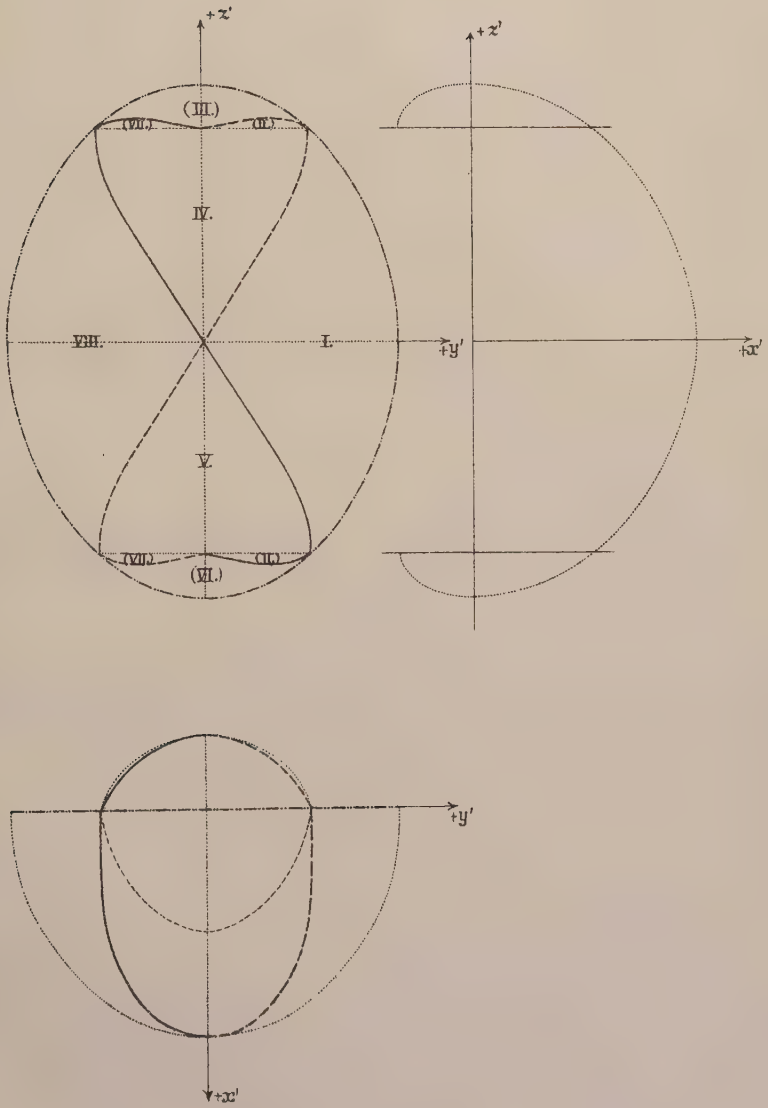
Fig.2.





Lith. Hubert Köhler, München.

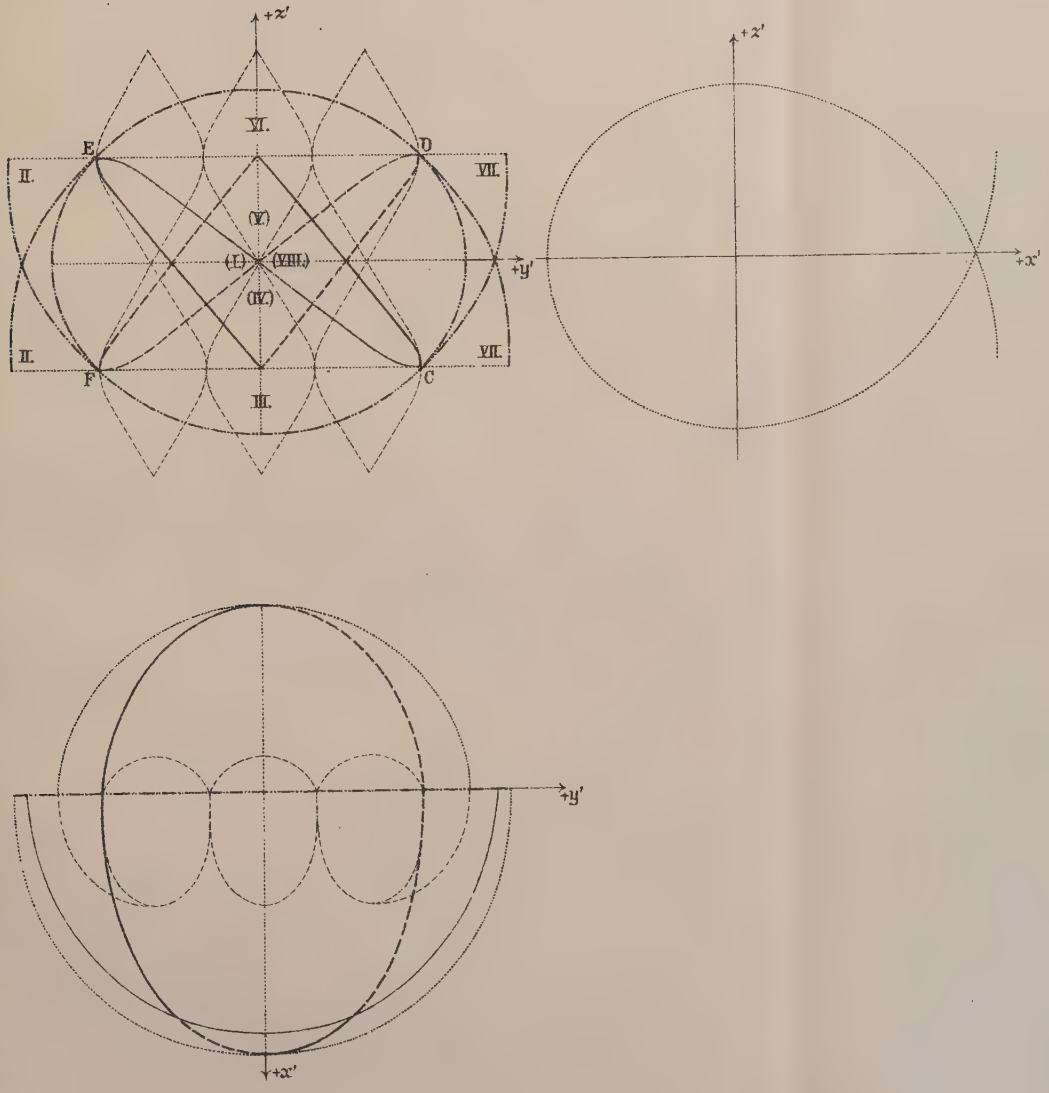
Fig. 3.



Lith. Hubert Köhler, München.

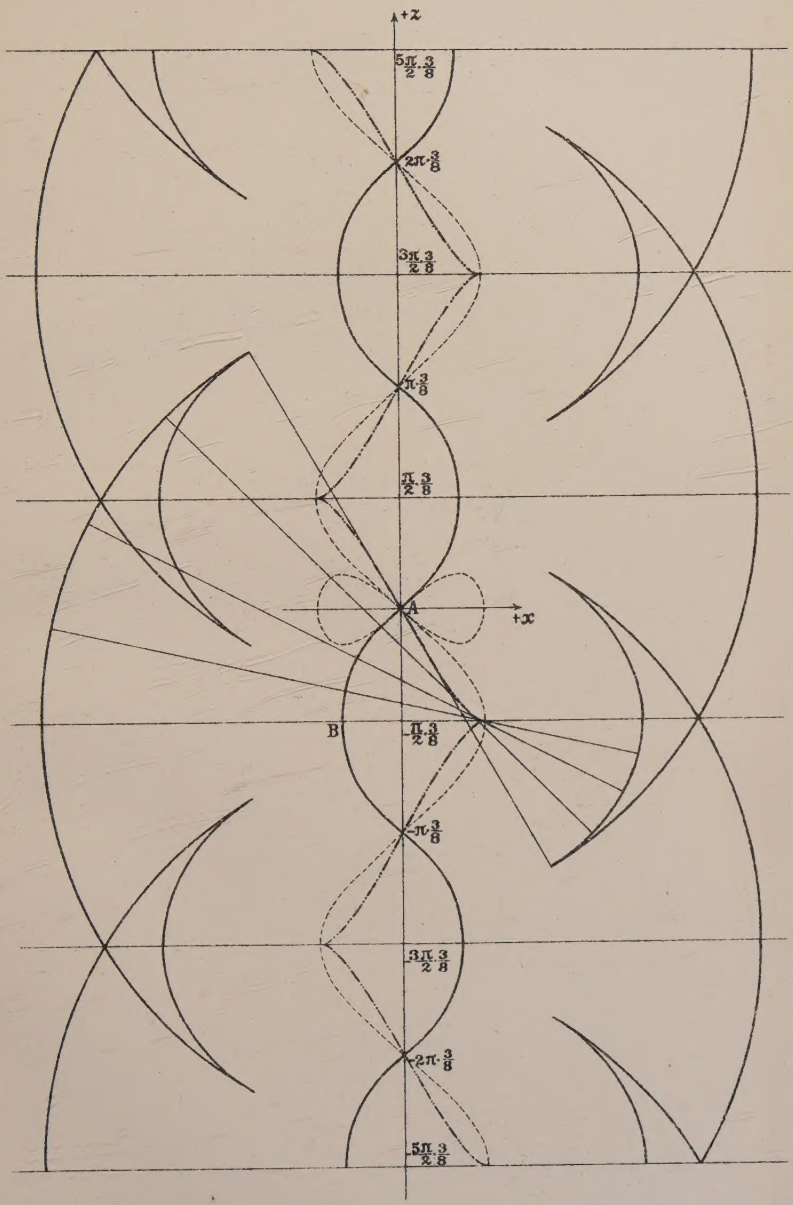
Fig. 4.

(Im halben Maßstab der Fig. 1. u. 3.)



Lith. Hubert Kähler, München.

Fig. 5.



Lith. Hubert Köhler, München.